

Interrogation 4 : corrigé

Exercice 1 Calculer les quantités suivantes en précisant les formules utilisées :

$$A = \sum_{k=4}^{n+1} \frac{3^{2k-1}}{2^{2-3k}} = \frac{3^7}{2^{-10}} \frac{72^{n-2} - 1}{71} = 2^{10} 3^7 \frac{72^{n-2} - 1}{71}$$

(suite géométrique de raison $\frac{3^2}{2^{-3}} = 72 \neq 1$)

$$B = \sum_{k=5}^{n-1} (3k + 12) = \frac{(27 + 3n + 9)(n - 5)}{2} = \frac{(36 + 3n)(n - 5)}{2}$$

(somme arithmétique) (de raison 3 mais ça ne sert à rien)

$$C = \sum_{k=2}^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+2) - \ln(2)$$

(télescopage)

Exercice 2 Soit $\alpha < 0$. On pose $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$.

- Donner l'ensemble de définition, la dérivée et le tableau de variations de f_α en donnant bien les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
 - Justifier que f_α réalise une bijection d'un ensemble I vers un ensemble J , qu'on précisera en les choisissant les plus grands possibles, et donner sa bijection réciproque.
- f_α est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (par composée) de dérivée : $f'_\alpha : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
On a le tableau de variation :

x	0	1	$+\infty$
f_α	$+\infty$	1	0

où les limites sont données par calcul direct (pas de forme indéterminée)

- Par théorème de la bijection monotone, f_α étant continue et strictement croissante, on déduit des limites précédentes que f_α réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même. Sa bijection réciproque est $f_{1/\alpha} : x \mapsto x^{1/\alpha}$.

Exercice 3

1. formule du binôme :

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2. formule de Pascal :

$$\forall k, n \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Exercice 4 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^4 + 1)}{x^2 + 3} :$

$$\frac{\ln(x^4 + 1)}{x^2 + 3} = \underbrace{\frac{\ln(x^4 + 1)}{(x^4 + 1)^{1/2}}}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{\frac{(1 + \frac{1}{x^4})^{1/2}}{1 + \frac{3}{x^2}}}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x^3 + 1} :$

$$\frac{e^{3x}}{x^3 + 1} = \underbrace{\frac{e^{3x}}{(3x)^3}}_{\rightarrow +\infty} \times \underbrace{\frac{(3x)^3}{x^3 + 1}}_{\rightarrow 27} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x \ln x + \ln x}{e^x + x \sin x} :$

$$\frac{x^3 - 3x \ln x + \ln x}{e^x + x \sin x} = \underbrace{\frac{x^3}{e^x}}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{\frac{1 - \frac{3 \ln x}{x^2} + \frac{\ln x}{x^3}}{1 + \frac{x}{e^x} \sin x}}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 5 Résoudre le système suivant par la méthode du pivot :

$$(S) : \begin{cases} x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ 3x & - & 6y & + & z & = & 7 \\ -2x & + & 5y & - & 2z & = & -1 \end{cases}$$

On résout par pivot :

$$(S) : \begin{cases} x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ 3x & - & 6y & + & z & = & 7 \\ -2x & + & 5y & - & 2z & = & -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ & - & 12y & - & 2z & = & -8 \\ & + & 9y & & & = & 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y & = & 1 \\ z & = & -6y + 4 = -2 \\ x & = & 5 - 2y - z = 5 \end{cases}$$

Donc le système admet $(5, 1, -2)$ comme unique triplet solution.