

Interrogation 3 : corrigé

Exercice 1 On considère $f : I \rightarrow J$, où I, J sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$:

1. Donner la définition de la bijectivité de f .
2. On considère f bijective, et $x_0 \in I$ tel que avec f est dérivable en x_0 .
 - (a) Donner l'équation de la tangente à la courbe de f en x_0 .
 - (b) Dire à quelle condition f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et donner alors sa dérivée. Que dire sur f^{-1} sinon ?
3. On considère $f : x \mapsto \frac{x+4}{x-1}$.
 - (a) Donner l'ensemble de définition I de f .
 - (b) Montrer que f réalise une bijection de I dans un ensemble J que l'on précisera, et donner sa bijection réciproque.
1. f est bijective si tout élément de J possède un unique antécédent dans I par f .
2. (a) L'équation de la tangente est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
(b) f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ si, et seulement si, $f'(x_0) \neq 0$, et alors : $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
Sinon : la courbe de f^{-1} admet une tangente verticale en son point d'abscisse $f(x_0)$.
3. (a) $f(x)$ est défini pour $x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire sur $I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
(b) Soit $y \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-1} = y \stackrel{x \neq 1}{\Leftrightarrow} (x+4) = y(x-1) \Leftrightarrow x(1-y) = -4-y$$

- si $y = 1$: alors $f(x) = y \Leftrightarrow 0 = 3$, qui n'a pas de solution, donc 1 ne possède pas d'antécédent par f ;
- si $y \neq 1$: alors $f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{y+4}{y-1}$, et donc y possède un unique antécédent par f , qui est $\frac{y+4}{y-1}$.

Ainsi f réalise une bijection de I dans $J = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (donc $I = J$) avec :

$$f^{-1} : y \mapsto \frac{y+4}{y-1}$$

donc $f = f^{-1}$ (c'est joli : autant le signaler).

Exercice 2 Compléter les formules suivantes :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Exercice 3

1. Donner la factorisation de $a^n - b^n$:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a - b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right).$$

2. À quelle condition peut-on factoriser $a^n + b^n$? Donner la factorisation dans ce cas.
Pour n impair :

$$a^n + b^n = a^n - (-b)^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} - b^{n-1}) = (a + b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k \right).$$

Exercice 4 1. Donner la définition de “ f est croissante” et sa négation.

2. On suppose qu’il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(a - x) = b - f(x)$: quelle propriété possède alors la courbe de f ?
3. On considère ici $f : x \mapsto (x - 1)^2$ de courbe $\mathcal{C}_f$:
 - (a) Montrer que f n’est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Montrer que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d’équation $x = 1$.

1. f croissante si : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Négation : $\exists x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ et } f(x) > f(y))$.

2. La courbe de f possède une symétrie centrale par rapport au point $(a/2, b/2)$.
3. (a) On a : $0 \leq 1$ mais $f(0) = 1 > 0 = f(1)$. Donc f n’est pas croissante.
(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(2 - x) = ((2 - x) - 1)^2 = (1 - x)^2 = (x - 1)^2 = f(x)$$

ce qui prouve la symétrie demandée.