

Interrogation 1 : corrigé

Exercice 1 Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On considère l'assertion suivante :

$$(\exists k \in \mathbb{Z}, a \times b = 2k) \Rightarrow ((\exists m \in \mathbb{Z}, a = 2m) \text{ ou } (\exists n \in \mathbb{Z}, b = 2n))$$

1. Écrire en français cette assertion.
 2. Écrire en symboles mathématiques sa négation.
 3. Écrire en symboles mathématiques sa contraposée.
 4. Écrire en français sa contraposée.
 5. Prouver l'assertion de départ.
1. Si le produit $a \times b$ est pair, alors a est pair ou b est pair.
 2. La négation de $A \Rightarrow B$ est A et non B , donc ici :

$$(\exists k \in \mathbb{Z}, a \times b = 2k) \text{ et } (\forall m \in \mathbb{Z}, a \neq 2m) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{Z}, b \neq 2n)$$

3. Sa contraposée est :

$$((\forall m \in \mathbb{Z}, a \neq 2m) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{Z}, b \neq 2n)) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{Z}, a \times b \neq 2k)$$

4. En français : le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.
5. On prouve la contraposée, ce qui est équivalent. Soient a, b deux entiers impairs. On pose $a = 2m + 1$ et $b = 2n + 1$ pour $m, n \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$a \times b = (2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1 = 2 \left(\underbrace{2mn + m + n}_{\in \mathbb{Z}} \right) + 1$$

donc $a \times b$ est impair, ce qui conclut la preuve.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n + 1) = \sum_{k=1}^n k \times (k + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}.$$

Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

- initialisation : pour $n = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n k \times (k+1) = 1 \times 2 = 2 \text{ et } \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$$

d'où le résultat pour $n = 1$;

- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{k=1}^n k \times (k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k \times (k+1) &= \left(\sum_{k=1}^n k \times (k+1) \right) + (n+1)(n+2) \stackrel{HR}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{3} (n+3) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} = \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3} \end{aligned}$$

d'où l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

Exercice 3 1. Donner la définition d'un intervalle.

2. Soient $a \in [1; 3[$ et $b \in]5, 9]$. Donner sans justification les intervalles les plus précis auxquels appartiennent $a + b, a - b, a \times b, \frac{a}{b}$.

3. Même question si $a \in [1; 3[$ et $b \in]-4, -1]$.

1. Un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle s'il est non vide et vérifie :

$$\forall a, b \in I, [a; b] \subset I.$$

2. On a directement :

$$a + b \in]6; 12[, a - b \in [-8; -2[, a \times b \in]5; 27[, \frac{a}{b} \in \left[\frac{1}{9}; \frac{3}{5}\right[.$$

3. De même :

$$a + b \in]-3; 2[, a - b \in [2; 7[, a \times b \in]-12; -1], \frac{a}{b} \in \left]-3; -\frac{1}{4}\right[.$$

Exercice 4 1. Par l'absurde, supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. On écrit alors : $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous forme irréductible, c'est-à-dire que $a, b \in \mathbb{N}$ sont sans diviseur commun autre que 1.

En élevant au carré, il vient : $2 = \frac{a^2}{b^2}$, et donc :

- $a^2 = 2b^2$ est pair, donc a est pair, et on peut écrire $a = 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$;
- en réinjectant, il vient : $b^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{(2n)^2}{2} = \frac{4n^2}{2} = 2n^2$ est pair, donc b est pair.

D'où la contradiction, car alors 2 diviserait a et b .

2. Procédons par l'absurde. Supposons que a ou b est non nul.

- Si b est non nul : alors on déduit : $\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde comme $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- Si a est non nul : alors $b = \frac{-a}{\sqrt{2}} \neq 0$, donc on se ramène au cas précédent, et on a encore une contradiction.

D'où le résultat.

3. On procède par double implication :

$$\Leftarrow \text{Supposons } a = c \text{ et } b = d. \text{ Alors directement } a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}.$$

$\Rightarrow$ Supposons $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$. Alors :

$$(a - c) + (b - d)\sqrt{2} = 0$$

Mais $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ donc $(a, c), (b - d) \in \mathbb{Z}$, donc d'après le point précédent :
 $a - c = b - d = 0$.

Donc $a = c$ et $b = d$, ce qui prouve bien la réciproque.

D'où le résultat par double implication.