

Interrogation 8

Exercice 1 1. Rappeler TOUS les résultats de croissances comparées en $+\infty$ pour $\ln$ et les fonctions puissances sous formes de limites, et les énoncer avec les relations de comparaison.

2. Rappeler les deux limites classiques associées à $\ln$ et $\exp$, et les énoncer avec des relations de comparaison.

1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$. Alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ et donc :

$$\ln(x)^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha).$$

2. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

et donc :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \text{ et } e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

Exercice 2 1. En utilisant éventuellement une intégration par parties, donner l'expression de l'unique primitive de Arcsin sur $] -1; 1[$ qui s'annule en 0.

2. En faisant le changement de variable $u = e^t$, calculer : $\int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1}$.

1. On dérive Arcsin et on primitive la constante. Pour, $x \in]-1; 1[$, on peut bien procéder par intégration par parties comme les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \text{Arcsin}(t)$ sont bien $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0; x]$ ou $[x; 0]$ (suivant le signe de x), et on a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^x \text{Arcsin}(t) dt &= [t \text{Arcsin}(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= x \text{Arcsin}(x) + \int_0^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} dt = x \text{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2} - 1. \end{aligned}$$

donc l'unique primitive de Arcsin qui s'annule en 0 est $x \mapsto x \text{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2} - 1$.

2. Avec $u = e^t$, on a $du = e^t dt$ et ainsi :

$$\int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1} = \int_1^e \frac{du}{u(u+1)} = \int_1^e \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \left[\ln \left| \frac{u}{u+1} \right| \right]_1^e = \ln(2) - \ln(e+1) + 1.$$

Exercice 3 Trouver toutes les solutions à l'équation différentielle : $y' + \frac{e^x}{1 + e^x}y = 1$ et donner la solution au problème de Cauchy $y(0) = 0$.

Méthode habituelle : on trouve :

$$S = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda + x + e^x}{1 + e^x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

et la solution au problème de Cauchy est $x \mapsto \frac{-1 + x + e^x}{1 + e^x}$.

Exercice 4 Trouver toutes les solutions à l'équation différentielle : $y'' - y = e^x \cos(2x)$ et donner la solution au problème de Cauchy $y(0) = -\frac{1}{8}$ et $y'(0) = \frac{1}{8}$.

Méthode habituelle avec polynôme caractéristique pour l'équation homogène. On passe par les complexes pour une solution particulière. On trouve :

$$S = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^x - \frac{e^x}{8} (\cos(2x) - \sin(2x)) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

et la solution au problème de Cauchy est : $x \mapsto -\frac{e^x}{8} (\cos(2x) - \sin(2x))$.