

Nom : _____

Interrogation 7

Exercice 1 On considère le complexe $z = \frac{2}{1+i}$.

1. Écrire z sous forme algébrique. Donner les racines carrées de z sous forme algébrique.
2. Écrire z sous forme trigonométrique. Donner les racines cubiques de z sous forme trigonométrique.

1. $z = 2 \frac{1-i}{1^2+1^2} = 1-i$

On résout $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = -1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \end{cases}$ donc les racines carrées de z sont $\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right)$.

2. On a directement $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et ainsi : $z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Donc les racines cubiques de z sont $\sqrt[6]{2}e^{-i\pi/12}, \sqrt[6]{2}e^{7i\pi/12}, \sqrt[6]{2}e^{5i\pi/4}$.

Exercice 2 On considère $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}}$.

1. Justifier que f possède une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner sous forme d'intégrale l'expression de F , l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.
2. En faisant le changement de variable $u = \sqrt{t}$ donner l'expression de F à l'aide des fonctions usuelles.

1. Les fonctions $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto t + t^3$ sont continues donc leur composée aussi. De plus $t \mapsto \sqrt{t} + \sqrt{t^3}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Par quotient, f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$: elle y possède une primitive par théorème fondamental de l'analyse.

Son unique primitive qui s'annule en 1 est : $F : x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}}$.

2. On a avec le changement de variable :

$$F : x \mapsto \int_1^{\sqrt{x}} \frac{2du}{1+u^2} = [2\arctan(u)]_1^{\sqrt{x}} = 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3 Donner TOUTES les primitives sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \cos^4(t)$.

On linéarise, ce qui donne : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$.

Et donc les primitive de $x \mapsto \cos^4(x)$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3x}{8} + \lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$ si on veut travailler avec des fonctions à valeurs complexes).

Exercice 4 On considère $a \in \mathbb{R}$ et on pose $P : t \mapsto x^2 + a$.

1. Donner suivant la valeur de a les racines réelles de P .

2. En déduire, selon la valeur de a , une primitive de $f : t \mapsto \frac{1}{P(t)}$.

1. On a trois cas :

- si $a > 0$: pas de racines réelles ;
- si $a = 0$: 0 est l'unique racine réelle ;
- si $a < 0$: les deux racines réelles sont $\pm\sqrt{-a}$.

2. On a trois cas :

- si $a > 0$: on a $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + a} = \frac{1}{a} \frac{1}{(x/\sqrt{a})^2 + 1}$ qui se primitive en $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan(x/\sqrt{a})$;
- si $a = 0$: on a $f : t \mapsto \frac{1}{x^2}$ qui se primitive en $x \mapsto -\frac{1}{x}$;
- si $a < 0$: on a $f : t \mapsto \frac{1}{(x - \sqrt{-a})(x + \sqrt{-a})} = \frac{1}{2\sqrt{-a}} \left(\frac{1}{x - \sqrt{-a}} - \frac{1}{x + \sqrt{-a}} \right)$
qui se primitive en $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{-a}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{-a}}{x + \sqrt{-a}} \right|$.

Exercice 5 On considère A, B, M des points distincts d'affixes respectivement $z_A, z_B, z \in \mathbb{C}$.

1. À quelle condition sur $\frac{z - z_A}{z - z_B}$ les points A, B, M sont-ils alignés ? Comment se traduit le fait que $\frac{z - z_A}{z - z_B}$ est imaginaire pur ?

2. En déduire le lieu géométriques des points M tels que $\frac{z - 3 + i}{z + 5 - 2i} \in \mathbb{R}$, et celui tel que $\frac{z - 3 + i}{z + 5 - 2i} \in i\mathbb{R}$.

1. A, B, M sont alignés si, et seulement si, $\frac{z - z_A}{z - z_B}$ est un réel

$\frac{z - z_A}{z - z_B}$ est un imaginaire pur si, et seulement si, les droites (AM) et (BM) sont perpendiculaires.

2. On pose $z_A = 3 - i$ et $z_B = -5 + 2i$.

On déduit que les M tels que $\frac{z - z_A}{z - z_B}$ est un réel forment la droite (AB) (privée des points A et B si on veut être cohérent avec le préambule).

De même, $\frac{z - z_A}{z - z_B}$ est un imaginaire pur si, et seulement si, le triangle ABM est rectangle en M , c'est-à-dire que les points M décrivent alors le cercle de diamètre $[AB]$ (privé de A et B si on veut être cohérent avec le préambule).