

Nom :

Interrogation 6

Exercice 1 On fait apparaître des croissances comparées ou des limites classiques. On conclut par opérations sur les limites (plus de FI) :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3) + x}{x^2 - 1} :$

$$\frac{\ln(x^3) + x}{x^2 - 1} = \frac{3\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} \rightarrow 0$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - x^2}{x^7} :$

$$\frac{e^{2x} - x^2}{x^7} = \frac{e^x - \frac{x^2}{e^x}}{\frac{x^7}{e^x}} \rightarrow +\infty$$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 \ln(x^5 + 1) + e^{-2x}}{x^2 - e^{x/2} + 4} :$

$$\frac{x^3 - x^2 \ln(x^5 + 1) + e^{-2x}}{x^2 - e^{x/2} + 4} = \frac{x^3}{e^{x/2}} \frac{1 - \frac{\ln(x^5 + 1)}{x} + \frac{e^{-2x}}{x^3}}{\frac{x^2}{e^{x/2}} - 1 + \frac{4}{e^{x/2}}} \rightarrow 0$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x + 1)} :$

$$\frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x + 1)} = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} \frac{x}{\ln(x + 1)} \cdot x \rightarrow 0$$

Exercice 2 1. Complétez les formules suivantes (avec toutes les versions s'il y en a plusieurs) :

(a) $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

(b) $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

(c) $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$

(d) $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$

2. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \cos(t) - \sqrt{3}\sin(t) = A\cos(t - \varphi).$$

On prend la méthode du cours. On a : $A = \sqrt{1 + 3} = 2$ et φ vérifiant $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$ et

$\sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ convient.

Exercice 3 1. Rappeler la définition et les propriétés générales de la fonction Arcsin (continuité, monotonie, parité, dérivabilité).

2. Justifier pour quelles valeurs de x la quantité $\tan(\text{Arcsin}(x))$ est bien définie, et la simplifier.

1. La fonction Arcsin est la bijection réciproque de la restriction de $\sin$ à $[-\pi/2; \pi/2]$. Elle est définie de $[-1; 1]$ dans $[-\pi/2; \pi/2]$. Elle est impaire. Elle est strictement croissante. Elle est continue sur $[-1; 1]$ et dérivable sur $] -1; 1[$, de dérivée : Arcsin' :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. La fonction Arcsin est à valeurs dans $[-\pi/2; \pi/2]$. Les seules valeurs de cet intervalle pour lesquelles $\tan$ n'est pas définie sont $\pm\pi/2$, qui ont pour antécédents ± 1 par Arcsin. Donc l'expression n'a de sens que pour $x \in] -1; 1[$.

Pour un tel x , on a : $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$. Et de plus : $\text{Arcsin}(x) \in] -\pi/2; \pi/2[$ donc $\cos(\text{Arcsin}(x)) \geq 0$. Et ainsi : $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{\cos^2(\text{Arcsin}(x))} = \sqrt{1 - \sin^2(\text{Arcsin}(x))} = \sqrt{1 - x^2}$. Et ainsi :

$$\tan(\text{Arcsin}(x)) = \frac{\sin(\text{Arcsin}(x))}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

et on retrouve d'ailleurs le même ensemble de définition dans l'expression finale que dans l'expression initiale : tout va bien !

Exercice 4 1. Complétez les formules suivantes :

(a) $\cos(2\pi/3) = -\frac{1}{2}$

(b) $\sin(-5\pi/6) = -\frac{1}{2}$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\frac{\pi}{3})$

(d) $-\sqrt{3} = \tan(-\frac{\pi}{3})$

2. Complétez les formules suivantes :

(a) $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$

(b) $\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$

(c) $\tan(\pi + x) = \tan(x)$

(d) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$