

Nom : _____

Interrogation 5

Exercice 1 Simplifier les quantités suivantes :

$$1. \sum_{i=3}^{n-1} 4i - 5 = \frac{4(n-1) - 5 + 4 \cdot 3 - 5}{2} \cdot (n-3) = \frac{4n-2}{2} \cdot (n-3) = (2n-1)(n-3)$$

où on a reconnu la somme des termes d'une suite arithmétique (de raison 4)

$$2. \prod_{k=2}^{n+1} 5k = 5^n \prod_{k=2}^{n+1} k = 5^n \cdot (n+1)!$$

$$3. \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{2^{n-2} - 1}{2 - 1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot (2^{n-2} - 1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

où on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $2 \neq 1$

$$4. \prod_{k=2}^{n+1} 3^{k-1} = 3^{\sum_{k=2}^{n+1} k-1} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

où le produit des puissances devient la puissance par la somme, et on reconnaît une somme arithmétique (de raison 1)

$$5. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2n)^k = (2n+1)^n$$

par application de la formule du binôme

Exercice 2 On considère $f : x \mapsto (1 + \ln(x))^x$.

1. La fonction f est définie en les $x \in \mathbb{R}$ tels que $1 + \ln(x) > 0$, donc sur : $]1/e; +\infty[$.
2. Pour tout x dans D_f , on a : $f(x) = \exp(x \ln(1 + \ln(x)))$. Donc par composée et produit, f est dérivable sur D_f avec :

$$\forall x > 1/e, f'(x) = \left(\ln(1 + \ln(x)) + \frac{1}{1 + \ln(x)} \right) (1 + \ln(x))^x.$$

3. Par inégalité classique : pour tout $t \in]-1; +\infty[$ on a : $\ln(1+t) \leq t$, avec égalité si, et seulement si, $t = 0$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $x - \ln(x) \geq 1$, avec égalité si, et seulement si, $x = 1$. Ce qui prouve bien le minimum de 1 (atteint en 1 seulement).

4. On déduit que pour tout $x \in D_f$:

$$\ln(1 + \ln(x)) + \frac{1}{1 + \ln(x)} = \frac{1}{1 + \ln(x)} - \ln\left(\frac{1}{1 + \ln(x)}\right) \geq 1 > 0$$

ce qui prouve que $f'(x)$ est toujours strictement positif : donc f est strictement croissante sur $]1/e; +\infty[$.

Pas de forme indéterminées pour les limites :

$$\lim_{x \rightarrow 1/e} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Exercice 3 Déterminer les limites suivantes (en les justifiant) :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^4+1)}{x^2+3}$:

$$\frac{\ln(x^4+1)}{x^2+3} = \frac{\ln(x^4+1)}{x^4+1} \times \frac{x^4+1}{x^2+3} = \underbrace{\frac{\ln(x^4+1)}{(x^4+1)^{1/2}}}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{\frac{(1+\frac{1}{x^4})^{1/2}}{1+\frac{3}{x^2}}}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^7+12}$:

$$\frac{e^{x^2}}{x^7+12} = \frac{e^{x^2}}{(x^2)^4} \times \frac{(x^2)^4}{x^7+12} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-3x\ln x+\ln x}{e^x+x\sin x}$:

$$\frac{x^3-3x\ln x+\ln x}{e^x+x\sin x} = \underbrace{\frac{x^3}{e^x}}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{\frac{1-\frac{3\ln x}{x^2}+\frac{\ln x}{x^3}}{1+\frac{x}{e^x}\sin x}}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{e^x-1}$:

$$\frac{\ln(x+1)}{e^x-1} = \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{x}{e^x-1}}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

Exercice 4 Résoudre le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ -7y = -3 \\ +7y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ -7y = -3 \\ 0 = -4 \end{cases}$$

donc le système n'a pas de solution.