

Interrogation 2

Exercice 1 1. Écrire la définition de “ f réalise une bijection de I dans J ”.

2. La fonction $x \mapsto x^2$ réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$? Et de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$?

1. La fonction f réalise une bijection de I dans J si tout élément de J possède un unique antécédent par f dans I .

2. Elle ne réalise une bijection dans aucun cas :

- premier cas : 1 possède deux antécédents dans $\mathbb{R}$ (à savoir 1 et -1), donc pas de bijection ;
- second cas : -1 ne possède aucun antécédent dans $\mathbb{R}_+$ (un carré de réel étant toujours positif ou nul).

Exercice 2 Soit f fonction définie sur un ensemble $\mathbb{R}$.

1. Écrire en symboles mathématiques les assertions “la fonction f est décroissante” et sa négation.

2. Faire de même avec l’assertion “la fonction f est strictement croissante”.

3. Montrer que, si f est strictement croissante, alors elle n’est pas décroissante.

4. Que penser de la réciproque ?

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

Négation : $\exists x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$ et $f(x) < f(y)$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Négation : $\exists x, y \in \mathbb{R}, x < y$ et $f(x) \geq f(y)$

3. Soit f strictement croissante. Avec $x = 0$ et $y = 37$ on a : $x < y$, et ainsi :

- par définition des inégalités larges : $x \leq y$;
- par stricte croissance de f : $f(x) < f(y)$

ce qui prouve bien que f n’est pas décroissante.

4. La réciproque est fausse : pour cela, il suffit de montrer qu’il existe des fonctions qui ne sont ni décroissante, ni strictement croissante. La fonction $f : x \mapsto x^2$ convient car :

- elle n’est pas décroissante : avec $x = 0$ et $x = 37$ on a bien $x \leq y$ mais $f(x) = 0 < 1369 = f(y)$;
- elle n’est pas strictement croissante : avec $x = -1$ et $y = 0$ on a bien $x < y$ mais $f(x) = 1 \geq 0 = f(y)$.

Exercice 3 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de la valeur absolue de x .

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

- (a) Écrire la définition de “ f est minorée” et de “ f n’est pas minorée”. Dire si la fonction valeur absolue est minorée, et le prouver.
- (b) Écrire la définition de “ f est majorée” et de “ f n’est pas majorée”. Dire si la fonction valeur absolue est majorée, et le prouver.

1. La valeur absolue de x est le réel positif : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

2. (a) “ f est minorée” : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq m$.

“ f n’est pas minorée” : $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) < m$.

La valeur absolue est minorée par 0 : soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

- si $x \geq 0$: $|x| = x \geq 0$;
- sinon : alors $x \leq 0$ et $|x| = -x \geq 0$.

(b) “ f est majorée” : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.

“ f n’est pas majorée” : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M$.

La valeur absolue n’est pas majorée. Soit $M \in \mathbb{R}$. Alors avec $x = |M| + 1$ on a : $x \geq 0$ donc $|x| = x = |M| + 1 \geq M + 1 > M$. Ce qui prouve l’assertion.

Exercice 4 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de la partie entière de x .

2. Résoudre l’équation $\lfloor 3x + 2 \rfloor = 4$.

1. La partie entière de x est le plus grand entier inférieur ou égal à x , c’est-à-dire l’unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$.

2. Par équivalences :

$$\lfloor 3x + 2 \rfloor = 4 \Leftrightarrow 4 \leq 3x + 2 < 5 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x < 1$$

et donc l’ensemble solution est $[2/3; 1[$.