

Interrogation 21

Exercice 1 Rappeler, avec les bonnes hypothèses, l'inégalité de Markov et l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev.

Inégalité de Markov : si X est une variable aléatoire positive et $a > 0$, alors :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Inégalité de Bienaymé–Tchebychev : si X est une variable aléatoire réelle et $a > 0$, alors :

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

Exercice 2 Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$.

1. Donner la loi conjointe du couple (X, Y) .
2. En déduire les lois marginales de X et de Y : sont-elles indépendantes ?
3. Donner l'espérance des variables aléatoires $X + Y$ et XY .

1. Par équiprobabilité (loi uniforme), les issues étant au nombre de $n \times p$, on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, p\}, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{np}.$$

2. Par formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événement associé à Y , on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^p \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=1}^p \frac{1}{np} = \frac{1}{n}$$

et de même pour Y , avec le système complet d'événements associé à X :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{np} = \frac{1}{p}$$

Donc X et Y suivent des lois uniformes respectivement sur $\{1, \dots, n\}$ et $\{1, \dots, p\}$.

De plus pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$ on a :

$$\mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{n} \frac{1}{p} = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$$

donc X et Y sont indépendantes.

Nom :

3. Par linéarité de l'espérance (pas besoin d'indépendance) :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{n+1}{2} + \frac{p+1}{2} = \frac{n+p}{2} + 1.$$

Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, elles sont décorrélées donc par formule de König–Huygens :

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{n+1}{2} \frac{p+1}{2}.$$

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 13 & -16 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A . On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, 5e_1 + 3e_2 + 2e_3, 2e_1 + e_2 + e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice M de f dans $\mathcal{B}'$.
3. Calculer M^2 : que penser de f^2 ?

1. On a $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Par pivot (ou système, les deux fonctionnent très

bien) on trouve que P est inversible, d'inverse : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. L'inversibilité assure que $\mathcal{B}'$ est bien une base.

2. Par formule de changement de base, on a :

$$M = \mathcal{P}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} A \mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Autre méthode : on calcule directement les images des éléments de $\mathcal{B}'$:

$$f(e'_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -e'_1, \quad f(e'_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e'_3 \quad \text{et} \quad f(e'_3) = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -e'_2$$

ce qui donne (encore heureux !) la même matrice.

3. On a directement $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Donc f^2 est une symétrie. Plus précisément, c'est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(f^2 - \text{id}) = \text{Vect}(e'_1)$ parallèlement à $\text{Ker}(f^2 + \text{id}) = \text{Vect}(e'_2, e'_3)$.