

Interrogation 20

Exercice 1 On considère différents dés à 6 faces : $n \in \mathbb{N}^*$ dés sont équilibrés et $m \in \mathbb{N}^*$ tombent toujours sur 6. On choisit un dé au hasard qu'on lance ensuite.

1. Quelle est la probabilité de faire un 6 ?
 2. Le montant vaut 1 : quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?
 3. Même question si le montant vaut 6.
-
1. On note T l'événement "le dé choisi est le dé truqué" et S l'événement "le dé choisi tombe sur 6". Par formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(T, \bar{T})$, on a :

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(T)\mathbb{P}_T(S) + \mathbb{P}(\bar{T})\mathbb{P}_{\bar{T}}(S)$$

où $\mathbb{P}(T) = \frac{m}{n+m}$, $\mathbb{P}(\bar{T}) = \frac{n}{n+m}$ (par équiprobabilité, comme les dés sont choisis au hasard) et $\mathbb{P}_T(S) = 1$, $\mathbb{P}_{\bar{T}}(S) = \frac{1}{6}$ (par description des dés). D'où : $\mathbb{P}(S) = \frac{6m+n}{6m+6n}$.

2. Les dés truqués ne tombent que sur 6, donc si le montant vaut 1 le dé n'était pas truqué. Donc la probabilité cherchée est nulle.
3. Par formule de Bayes, la probabilité cherchée est :

$$\mathbb{P}_S(T) = \frac{\mathbb{P}_T(S)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{1 \cdot \frac{m}{m+n}}{\frac{6m+n}{6m+6n}} = \frac{6m}{6m+n}$$

Exercice 2 Soit $P = X^4 + 2X^2 - 8X + 5$.

1. La multiplicité de 1 comme racine de P .
 2. En déduire la factorisation de P comme produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
 3. En déduire la factorisation de P comme produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
-
1. On évalue et on dérive en 1. On a : $P(1) = 1 + 2 - 8 + 5 = 0$.
Puis $P' = 4X^3 + 4X - 8$ donc $P'(1) = 0$.
Puis $P'' = 12X + 4$ donc $P''(1) = 16 \neq 0$.
Donc 1 est racine double de P .

2. Comme 1 est racine double, P est divisible par $(X - 1)^2$. On pose la division euclidienne, ce qui donne $P = (X - 1)^2(X^2 + 2X + 5)$. C'est la factorisation en irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ comme $X^2 + 2X + 5$ n'a pas de racine réelle.
3. Il suffit de factoriser $X^2 + 2X + 5$ sur $\mathbb{C}[X]$, ce qu'on fait avec ses racines. On voit directement la forme canonique :

$$X^2 + 2X + 5 = (X + 1)^2 + 4 = (X + 1 - 2i)(X + 1 + 2i)$$

d'où la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$: $P = (X - 1)^2(X - (-1 + 2i))(X - (-1 - 2i))$.

Exercice 3 Soit $P = X^3 - 1$.

1. Donner la factorisation de P comme produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
2. La fraction rationnelle $\frac{X^3 - X}{X^3 - 1}$ est-elle irréductible ?
3. Donner sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$.
4. Faire de même sur $\mathbb{R}$.

1. On a 1 comme racine évidente puis :

$$P = (X - 1)(X^2 + X + 1) = (X - 1)(X - e^{2i\pi/3})(X - e^{-2i\pi/3})$$

qui sont les deux factorisations voulues ($X^2 + X + 1$ n'ayant pas de racine réelle).

2. On peut simplifier par $X - 1$ ce qui donne : $\frac{X^3 - X}{X^3 - 1} = \frac{X^2 + X}{X^2 + X + 1} = \frac{X(X + 1)}{X^2 + X + 1}$ qui elle est bien irréductible (aucun facteur du dénominateur n'apparaît dans la décomposition en irréductibles du numérateur).
3. On a 1 comme partie entière (en regardant les monômes dominants), donc cette décomposition est de la forme :

$$\frac{X^2 + X}{X^2 + X + 1} = 1 + \frac{-1}{X^2 + X + 1} = 1 + \frac{a}{X - e^{2i\pi/3}} + \frac{b}{X - e^{-2i\pi/3}}$$

et en faisant tendre X vers $e^{\pm 2i\pi/3}$ on trouve directement $a = \frac{-1}{e^{2i\pi/3} - e^{-2i\pi/3}} = i\sqrt{3}/3$ et $b = -i\sqrt{3}/3$ d'où la décomposition :

$$\frac{X^3 - X}{X^3 - 1} = 1 + \frac{i\sqrt{3}/3}{X - e^{2i\pi/3}} + \frac{-i\sqrt{3}/3}{X - e^{-2i\pi/3}}.$$

4. C'est la première écriture ci-dessus : $\frac{X^3 - X}{X^3 - 1} = 1 + \frac{-1}{X^2 + X + 1}$.

Exercice 4 Soit $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x + 2y + 3z + 4t = 0\}$.

1. Montrer que H est un plan de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.
2. En déduire avec le moins de calculs possibles que la famille $((19, -30, 3, 8), (6, -8, -2, 4))$ est une base de H .

1. On résout le système associé. On trouve :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z - t = z + 2t \\ y = -2z - 3t \end{cases}$$

$$\text{donc } H = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

La famille donnée est une base : génératrice (par construction) et libre (deux vecteurs non proportionnels). C'est donc une base. Étant de cardinal 2, on déduit que H est un plan.

2. La famille de l'énoncé est libre (constituée de deux vecteurs clairement non proportionnels en regardant les signes des coordonnées). Comme H est de dimension 2, il suffit de vérifier que les deux éléments sont dans H , ce qui est bien le cas car :

$$19 - 30 + 3 + 8 = 0 = 19 - 60 + 9 + 32 \text{ et } 6 - 8 - 2 + 4 = 0 = 6 - 16 - 6 + 16$$

La famille est donc une famille libre constituée de deux éléments de H , et H de dimension 2 : c'est donc une base de H .