

Interrogation 19

Exercice 1 1. Par double implication :

- si $\text{Imp} = \text{Im}q$: les rôles de p et q sont symétriques donc il suffit de montrer l'une des égalités. Soit $x \in E$. Alors $q(x) \in \text{Im}q = \text{Imp}$ donc $p(q(x)) = q(x)$. Et donc $p \circ q = q$.
- si $(p \circ q = q \text{ et } q \circ p = p)$: par symétrie il suffit de montrer une inclusion : soit $x \in \text{Imp}$. Alors $x = p(x) = q \circ p(x) = q(p(x)) \in \text{Im}q$. Donc $\text{Imp} \subset \text{Im}q$.

2. Par double implication :

- si $\text{Kerp} = \text{Ker}q$: par symétrie il suffit de montrer l'une des égalités. Soit $x \in E$. Alors $(p(x) - x) \in \text{Kerp} = \text{Ker}q$. Donc $q(p(x) - x) = 0$, puis $q \circ p(x) = q(x)$. Donc $q \circ p = q$.
- si $(p \circ q = p \text{ et } q \circ p = q)$: par symétrie il suffit de montrer une inclusion. Soit $x \in \text{Kerp}$: alors $q(x) = q \circ p(x) = q(p(x)) = q(0) = 0$. Donc $x \in \text{Ker}q$. Donc $\text{Kerp} \subset \text{Ker}q$.

Exercice 2 Posons $\varphi : x \mapsto (f(x) - f'(x))\exp(x)$. Par combinaison linéaire et produit, φ est dérivable sur $[a; b]$ avec : $\varphi' : x \mapsto (f'(x) - f''(x) + f(x) - f'(x))\exp(x) = (f(x) - f''(x))\exp(x)$.

Mais $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Par théorème de Rolle appliqué à φ entre a et b , il existe $c \in]a; b[$ tel que $\varphi'(c) = (f(c) - f''(c))\exp(c) = 0$, et ainsi $f(c) = f''(c)$.

Exercice 3 On va appliquer le théorème de Rolle aux dérivées successives de f pour construire récursivement une suite finie d'éléments $b_0, \dots, b_n$ tels que :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, f^{(i)}(b_i) = 0 \text{ et } b_i \in]a; b_{i-1}[$$

(avec l'abus de notation $b_{-1} = +\infty$)

- pour $i = 0$: $b_0 = b$ convient ;
- soit $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$; supposons b_i construit : la fonction $f^{(i)}$ est dérivable sur $[a; b]$ (comme $i < n$) et vérifie $f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b_i) = 0$. Par théorème de Rolle, il existe $d \in]a; b_i[$ tel que $f^{(i+1)}(d) = 0$. Et alors $b_{i+1} = d$ convient.

D'où la construction des b_i .

Et $c = b_n$ convient.

Exercice 4 1. Procédons par analyse-synthèse :

- analyse : soit P solution : alors $P = 0$ ou $\deg(P \circ P) = \deg(P)^2 = \deg(P)$ donc $\deg(P) \leq 1$ (dans tous les cas).
- synthèse : soit $P \in \mathbb{K}_1[X]$. On pose $P = aX + b$, et alors :

$$P \circ P = P \Leftrightarrow a(aX+b)+b = aX+b \Leftrightarrow a(a-1)X+ab = 0 \Leftrightarrow a(a-1) = ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou } a = 1 \text{ et } b = 0 \end{cases}$$

par égalité coefficient par coefficient.

Conclusion : les solutions sont X et les polynômes constants.

2. On procède de même :

- analyse : soit P solution : $\deg(P(X^2)) = 2\deg(P) = \deg((X^2 + 1)P) = 2 + \deg(P)$ donc $P = 0$ ou $\deg(P) = 2$. Donc $\deg(P) \leq 2$ (dans tous les cas).
- synthèse : soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. On pose $P = aX^2 + bX + c$, et alors :

$$\begin{aligned} P \text{ solution} &\Leftrightarrow aX^4 + bX^2 + c = (X^2 + 1)(aX^2 + bX + c) = aX^4 + bX^3 + (a + c)X^2 + bX + c \\ &\Leftrightarrow b = a + c = 0 \Leftrightarrow P = a(X^2 - 1) \end{aligned}$$

par égalité coefficient par coefficient.

Conclusion : les solutions sont les polynômes de la forme $a(X^2 - 1)$ pour $a \in \mathbb{K}$.

Exercice 5 Dans chaque cas, les fonctions sont deux fois dérivables dont on déduit la convexité du signe de leur dérivée seconde :

1. $\ln'' : x \mapsto -\frac{1}{x^2} < 0$ donc la fonction $\ln$ est concave, et ainsi :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in]0; 1[, \ln(tx + (1 - t)y) \geq t\ln(x) + (1 - t)\ln(y) = \ln(x^t y^{1-t})$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue, en appliquant la fonction $\exp$ qui est (strictement) croissante.

2. La fonction f est deux fois dérivable sur $]1; +\infty[$ par composée bien définie de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, avec :

$$f' : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)} \text{ puis } f'' : x \mapsto -\frac{\ln(x) + 1}{x^2 \ln^2(x)} < 0$$

donc f est concave sur $]1; +\infty[$.

Par définition, avec $t = 1/2$:

$$\forall x, y \in]1; +\infty[, f\left(\frac{x + y}{2}\right) \geq \frac{f(x) + f(y)}{2} = \ln\left(\sqrt{\ln(x)\ln(y)}\right)$$

ce qui donne à nouveau l'inégalité voulue en appliquant $\exp$.

Exercice 6 1. Comme f n'est pas décroissante, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$a < b \text{ et } f(a) < f(b)$$

et ainsi, pour tout $x > b$, comme la courbe d'une fonction convexe est au-dessus de ses sécantes (ou par inégalité des pentes) :

$$f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b)$$

où le membre de droite tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (comme $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$ par hypothèse).

D'où le résultat par divergence par minoration.

2. Par contraposée du point précédent, si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \neq +\infty$, on déduit que f est décroissante.

Par limite monotone : elle tend vers sa borne inférieure, donc un minorant.

Or, elle tend vers 0, qui est donc un minorant : donc f est bien positive.

3. Pour un tel g , pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0; 1]$ on a par convexité de f :

$$g(tx + (1 - t)y) = f(tx + (1 - t)y) - a(tx + (1 - t)y) - b \leq tf(x) + (1 - t)f(y) - a(tx + (1 - t)y) - b = t(f(x) - (ax + b)) + (1 - t)(f(y) - (ay + b))$$

ce qui prouve la convexité de g .

4. On applique les deux questions précédentes.

Soit f convexe admettant pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$. Alors en posant $g : x \mapsto f(x) - (ax + b)$, on a bien que g est convexe (par la question 3) et tend vers 0 en $+\infty$ (par définition de l'asymptote) donc est positive (par la question 2).

La positivité de g donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) - (ax + b) \geq 0 \text{ donc } f(x) \geq ax + b$$

ce qui donne bien que la courbe de f est au-dessus de son asymptote.

Exercice 7 1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit et composée) avec :

$$f' : x \mapsto (1 + 2x^2)e^{x^2} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (par produit et composée, pas de FI), on déduit par théorème de la bijection monotone (f étant continue sur $\mathbb{R}$ par produit et composée) que f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Par produit et composée, la fonction f est $\mathcal{C}^\infty$. Comme de plus f' ne s'annule jamais, alors f^{-1} est également $\mathcal{C}^\infty$, donc f et f^{-1} admettent des dl à tout ordre en tout point par formule de Taylor-Young.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = (-x)e^{(-x)^2} = -xe^{x^2} = -f(x)$$

donc f est impaire.

En tant que bijection réciproque de f , f^{-1} est donc également impaire.

Remarque : on peut refaire au besoin la preuve. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = f^{-1}(y)$ (de sorte que $y = f(x)$). Alors par imparité de f :

$$f(-x) = -f(x) = -y$$

donc $-x$ est l'antécédent de $-y$ par f , ce qui assure par définition que $-f^{-1}(y) = -x = f^{-1}(-y)$, donc f^{-1} est impaire.

4. Comme $f(0) = 0$, on déduit le dl5 en 0 de f^{-1} de celui de f . Comme f^{-1} est impaire, alors son dl5 en 0 est de la forme :

$$f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5).$$

On a par dl de l'exponentielle en 0 (et composition à droite et produit) :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^5).$$

et en utilisant que $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}}$ on déduit :

- avec la première écriture :

$$x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x^5) \underset{x \rightarrow 0}{=} af(x) + bf(x)^3 + cf(x)^5 + o(f(x)^5) \underset{x \rightarrow 0}{=} ax + (a+b)x^3 + (a/2 + 3b + c)x^5 + o(x^5)$$

et par unicité d'un dl on déduit :

$$a = 1, a + b = 0 \text{ et } a/2 + 3b + c = 0$$

donc :

$$f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o(x^5).$$

- avec la seconde écriture :

$$x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x^5) \underset{x \rightarrow 0}{=} f^{-1}(x) + f^{-1}(x)^3 + \frac{1}{2}f^{-1}(x)^5 \underset{x \rightarrow 0}{=} ax + (a^3 + b)x^3 + (a^5/2 + 3a^2b + c) + o(x^5)$$

et par unicité d'un dl on déduit :

$$a = 1, a^3 + b = 0 \text{ et } a^5/3 + 3a^2b + c = 0$$

et on retrouve comme ci-dessus :

$$f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o(x^5).$$

Exercice 8 On a par dl2 de l'exponentielle en 0 :

$$f(x) = (x+1)e^{1/x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} (x+1) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o(x^{-2}) \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + 2 + \frac{3}{2x} + o(1/x)$$

et ainsi la droite d'équation $y = x+2$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$, et comme $f(x) - (x+2) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{2x} > 0$ on déduit que la courbe de f est au-dessus de son asymptote.

Exercice 9 On détermine à chaque fois $X(\Omega)$, puis on regroupe les probabilités :

1. X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; 20 \rrbracket$ donc $Y = \sqrt{X}$ est à valeurs dans $\llbracket 1; 4 \rrbracket$. Et on a :

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(1 \leq X \leq 3) = \frac{3}{10}, \quad \mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(4 \leq X \leq 8) = \frac{5}{20},$$

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(9 \leq X \leq 15) = \frac{7}{20} \text{ et } \mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}(16 \leq X \leq 20) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

2. X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; 6n \rrbracket$ ($n \in \mathbb{N}^*$) donc $Z = \cos\left(\frac{\pi X}{3}\right)$ est à valeurs dans $\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}\}$. Et on a :

$$\mathbb{P}(Z = 1/2) = \mathbb{P}(X \equiv \pm 1[6]) = \frac{2n}{6n} = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(Z = -1/2) = \mathbb{P}(X \equiv \pm 2[6]) = \frac{2n}{6n} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X \equiv 0[6]) = \frac{n}{6n} = \frac{1}{6} \text{ et } \mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(X \equiv 3[6]) = \frac{n}{6n} = \frac{1}{6}.$$

Exercice 10 1. Les boules étant indiscernables, A et B suivent des lois uniformes sur $\llbracket 1; n \rrbracket$:

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}(A = k) = \mathbb{P}(B = k) = \frac{1}{n}.$$

2. Par définition du maximum :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, (X \leq k) = (A \leq k) \cap (B \leq k) \text{ et } (X \geq k) = (A \geq k) \cup (B \geq k)$$

3. Par indépendance des tirages, on déduit :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}(A \leq k) \cdot \mathbb{P}(B \leq k) = \frac{k^2}{n^2}$$

On utilise ensuite que, par union disjointe :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1)$$

et en réinjectant le résultat précédent :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

On vérifie la normalisation en reconnaissant une somme arithmétique.