

Interrogation 18

Exercice 1 On considère $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Donner la définition de $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements.
2. Donner, pour un événement B , la formule des probabilités totales associée au système complet $(A_1, \dots, A_n)$.
3. Soient A, B deux événements de probabilité non nulle. Donner la formule de Bayes associée à A et B .
1. La famille $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements s'ils sont deux-à-deux incompatibles et que leur union fait Ω (autre formulation : c'est un recouvrement disjoint de Ω).
2. On a directement la formule :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

avec la convention que $\mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B) = 0$ dès que $\mathbb{P}(A_i) = 0$ (sinon la probabilité conditionnelle n'est pas proprement définie).

3. Avec les notations, on a :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Exercice 2 On considère une urne contenant $n \in \mathbb{N}^*$ boules indiscernables, et on tire $p \in \mathbb{N}^*$ boules. Donner le nombre de tirages dans les cas suivants :

1. Les tirages se font sans remise sans tenir compte de l'ordre.
2. Les tirages se font sans remise en tenant compte de l'ordre.
3. Les tirages se font avec remise sans tenir compte de l'ordre.
4. Les tirages se font avec remise en tenant compte de l'ordre.

On trouve respectivement $\binom{n}{p}$, A_n^p , $\binom{p}{n+p-1}$ et n^p tirages pour les quatre protocoles.

Exercice 3 On considère deux dés à 6 faces : un équilibré, et un truqué qui ne fait que des 6. On choisit au hasard un dé, puis on le lance.

1. Quelle est la probabilité de faire un 6 ?
2. On fait un 4 : quelle est la probabilité que le dé choisi soit le dé truqué ?
3. On fait un 6 : quelle est la probabilité que le dé choisi soit le dé truqué ?
1. On note A l'événement "le lancé est avec le premier dé", B l'événement "le lancé est avec le second dé", et pour $i \in \{1, \dots, 6\}$, on note C_i l'événement "le montant est i ". Par formule des probabilités totales associée au système complet d'événements (A, B) , la probabilité cherchée vaut :

$$\mathbb{P}(C_6) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}_A(C_6) + \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}_B(C_6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{7}{12}$$

2. Ici, pas besoin de se prendre la tête : le dé truqué ne faisant que des 6, si on fait un 4, c'est qu'on a tiré le dé non truqué. La probabilité cherchée est donc nulle.
3. On utilise la formule de Bayes. On cherche à calculer $\mathbb{P}_{C_6}(B)$. On a :

$$\mathbb{P}_{C_6}(B) = \frac{\mathbb{P}_B(C_6) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(C_6)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{12}} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

Exercice 4 On considère un sachet de 100 Dragibus dont : la moitié sont jaunes, 30% sont verts, et les autres sont rouges.

1. Combien de bonbons de chaque type y a-t-il dans le paquet ?
2. On tire deux bonbons que l'on mange : quelle est la probabilité que les deux bonbons soient de la même couleur ?
3. On renverse une partie du paquet : trois verts, deux jaunes et cinq rouges tombent par terre, que l'on remet dans le paquet :
 - (a) Quelle est la probabilité de tirer un bonbon tombé par terre ?
 - (b) On mange un bonbon tiré au hasard : sachant qu'il était tombé par terre, quelle est la probabilité qu'il soit jaune, vert ou rouge ?
1. Il y a 50 bonbons jaunes et 30 verts. Les autres sont rouges, et sont donc au nombre de 20.

2. Tirer deux bonbons de même couleur revient à tirer deux rouges, deux jaunes ou deux verts. Ces trois événements sont incompatibles, et donc la probabilité de tirer deux bonbons de même couleur est la somme des probabilités de tirer deux rouges, deux jaunes ou deux verts. On suppose que les Dragibus sont indiscernables :

- pour tirer deux jaunes : par formules des probabilités composées, on a directement une probabilité de : $\frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} = \frac{49}{198}$;
- pour les rouges : de même on a une probabilité de : $\frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} = \frac{19}{495}$
- pour les verts : de même on a une probabilité de : $\frac{30}{100} \cdot \frac{29}{99} = \frac{29}{330}$

Et en additionnant, on trouve une probabilité de :

$$\frac{49}{198} + \frac{19}{495} + \frac{29}{330} = \frac{37}{99}$$

(une très jolie probabilité, il est bon de le souligner)

3. (a) Il y a 10 bonbons tombés par terre, donc une probabilité de $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ de tirer un bonbon qui était tombé par terre.
- (b) On note respectivement J, V, R, T les événements que le bonbon pris est jaune, vert, rouge, tombé. On a directement par dénombrement :

$$\mathbb{P}_T(J) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}_T(V) = \frac{3}{10}, \quad \mathbb{P}_T(R) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$