

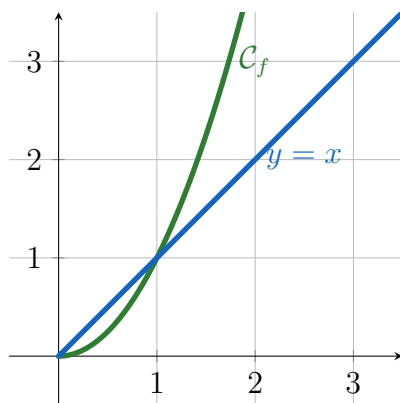
Interrogation 15

Exercice 1 1. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $(f - \text{id})(x) = x^2 - x = x(x - 1)$ ce qui donne le tableau de signe suivant :

x	0	$+\infty$		
$f(x)$	0	$+\infty$		

x	0	1	$+\infty$	
$f(x) - x$	0	-	0	+

2. On a le graphe suivant :



3. Par disjonction de cas :

- si $n = 0$: par hypothèse sur l'énoncé ;
- si $n > 0$: $u_n = u_{n-1}^2 \geq 0$.

4. La suite (u_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et f est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc (u_n) est monotone. Plus précisément :

- si $u_0 = 0$: (u_n) est constante de valeur 0 et converge vers 0 ;
- si $u_0 = 1$: (u_n) est constante de valeur 1 et converge vers 1 ;
- si $u_0 \in]0; 1[$: par signe de $f - \text{id}$, $u_1 < u_0$ donc (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc converge vers un point fixe de f (par continuité de f). Sa limite ℓ vérifie : $0 \leq \ell \leq u_0 < 1$ donc et le seul point fixe de f qui vérifie cette inégalité est 0. Donc (u_n) converge vers 0 ;

- si $u_0 > 1$: par signe de $f - \text{id}$, $u_1 > u_0$ donc (u_n) est croissante. Elle possède une limite ℓ (finie ou non) qui vérifie $1 < u_0 \leq \ell$. Si ℓ était finie, ce serait un point fixe de f (par continuité de f) mais aucun point fixe de f ne vérifie cette inégalité. Donc $\ell = +\infty$: la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 2 On écrit à chaque fois les ensembles comme des Vect ce qui montre que ce sont des espaces vectoriels et en donne des familles génératrices. On vérifie que les familles trouvées sont libres pour en déduire que ce sont des bases :

1. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x + 2y + 3z + 4t = 0\}$: on résout le système :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + 2z + 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 2t \\ y = -2z - 3t \end{cases}$$

ce qui donne comme ensemble :

$$\begin{aligned} \{(z + 2t, -2z - 3t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} &= \{z(1, -2, 1, 0) + t(2, -3, 0, 1) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)). \end{aligned}$$

Et on a bien une base parce que les deux vecteurs sont non proportionnels (des 0 pas au même endroit), donc forment une famille libre, qui est donc une base de l'espace vectoriel considéré.

2. $\{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y'' = 4y' - 3y\}$: on résout l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = 0$: le polynôme caractéristique est $X^2 - 4X + 3 = (X - 3)(X - 1)$ donc les solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

donc l'ensemble est :

$$\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{3x})$$

et la famille génératrice utilisée est bien libre (non proportionnelles comme l'une est négligeable devant l'autre par exemple) donc c'est une base.

Exercice 3 Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda(y + z) + \mu(z + x) + \nu(x + y) = 0$.

Alors : $(\mu + \nu)x + (\lambda + \nu)y + (\lambda + \mu)z = 0$.

Par liberté de la famille (x, y, z) , on a donc : $\begin{cases} \mu + \nu = 0 \\ \lambda + \nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \mu + \nu = 0 \\ \lambda + \nu = 0 \\ \lambda - \nu = 0 \end{cases}$

$$\text{donc } \begin{cases} \mu + \nu = 0 \\ \lambda + \nu = 0 \\ -2\nu = 0 \end{cases}.$$

Donc $\nu = \lambda = \mu = 0$. Donc la famille $(y + z, z + x, x + y)$ est libre.

Exercice 4 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que f est continue en a .

Par limite monotone, comme f est croissante, on a déjà que $\alpha = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ et $\beta = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existent (dans $\mathbb{R}$) et que :

$$\alpha \leq f(a) \leq \beta$$

On veut montrer que $\alpha = f(a) = \beta$. Il suffit, grâce à l'inégalité précédente, de montrer que $\alpha \geq \beta$.

Par opération sur les limites, comme $a \neq 0$, on a :

$$\frac{\alpha}{a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) \text{ et } \frac{\beta}{a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$$

et par limite monotone appliquée à g , on a également :

$$\frac{\alpha}{a} \geq \frac{f(a)}{a} \geq \frac{\beta}{a}$$

et ainsi : $\alpha \geq f(a) \geq \beta$ (en multipliant par $a > 0$).

Et finalement $\alpha = f(a) = \beta$: la fonction f est continue en a .

Comme ceci est vrai pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 On pose $g = f - \text{id}$ dont on va montrer qu'elle s'annule, ce qui est équivalent à l'existence d'un point fixe pour f . Par combinaison linéaire, g est continue.

1. si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$: on a $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ donc g s'annule par TVI: f a un point fixe.
2. si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $[a, b] \subset f([a, b])$: posons $c, d \in [a, b]$ tels que $f(c) = a$ et $f(d) = b$ (qui existent bien car $a, b \in [a, b]$ donc $a, b \in \text{Im} f$).. Alors $g(c) = a - c \leq 0$ et $g(d) = b - d \geq 0$ donc g s'annule entre c et d (donc sur $[a, b]$) par TVI : f a un point fixe.

On pouvait aussi procéder par théorème des bornes atteintes en étudiant g en les points en lesquels f est maximale ou minimale.

Exercice 6 1. Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$$

puis :

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) &= (\lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda x_1 + \mu x_2 - 2(\lambda y_1 + \mu y_2), 0) \\ &= \lambda(x_1 + y_1, x_1 - 2y_1, 0) + \mu(x_2 + y_2, x_2 - 2y_2, 0) = \lambda f(x_1, y_1) + \mu f(x_2, y_2) \end{aligned}$$

(en regroupant les termes en λ et ceux en μ) ce qui prouve la linéarité.

Pour le noyau : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$(x, y) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

en reconnaissant un système linéaire de déterminant $-3 \neq 0$. Donc $\text{Ker } f = \{0\}$. L'application f est donc injective.

Pour l'image : on utilise que l'image d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ engendre l'image. Et ainsi :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(0, 1), f(1, 0)) = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, -2, 0))$$

et la famille considérée est libre (deux vecteurs non proportionnels) donc c'est une base de $\text{Im } f$.

Le vecteur $(0, 0, 1)$ n'appartient clairement pas à $\text{Im } f$: f n'est donc pas surjective, donc pas bijective.

2. Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$$

puis :

$$\begin{aligned} g(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) &= (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda x_1 + \mu x_2, \lambda x_1 + \mu x_2) \\ &= \lambda(x_1, x_1, x_1) + \mu(x_2, x_2, x_2) = \lambda g(x_1, y_1) + \mu g(x_2, y_2) \end{aligned}$$

(en regroupant les termes en λ et ceux en μ) ce qui prouve la linéarité.

Pour le noyau : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$(x, y) \in \text{Ker } g \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, y) = y(0, 1) \in \text{Vect}((0, 1))$$

Donc $\text{Ker } g = \text{Vect}((0, 1)) \neq \{0\}$. L'application g n'est donc pas injective, donc pas bijective.. La famille $((0, 1))$ engendre son noyau, et est libre (constituée d'un seul vecteur non nul) donc c'est une base de son noyau.

Pour l'image : on utilise que l'image d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ engendre l'image. Et ainsi :

$$\text{Im } g = \text{Vect}(g(0, 1), g(1, 0)) = \text{Vect}((1, 1, 1), (0, 0, 0)) = \text{Vect}((1, 1, 1))$$

et la famille considérée est libre (un seul vecteur non nul) donc c'est une base de $\text{Im } g$.

Le vecteur $(0, 0, 1)$ n'appartient clairement pas à $\text{Im } g$: g n'est donc pas surjective, donc pas bijective.

Exercice 7 On procède par double implication :

- si $f(A) \subset f(B)$: montrons l'inclusion. Soit $x \in A + \text{Ker} f$. On pose $x = a + y$ avec $a \in A$ et $y \in \text{Ker} f$.

Alors $f(x) = f(a) \in f(A) \subset f(B)$.

Donc il existe $b \in B$ tel que $f(x) = f(b)$.

Puis $x = b + (x - b)$ avec $b \in B$ et $f(x - b) = f(x) - f(b) = 0$, c'est-à-dire $x - b \in \text{Ker} f$.

Donc $x \in B + \text{Ker} f$.

D'où l'inclusion.

D'où la première implication..

- si $A + \text{Ker} f \subset B + \text{Ker} f$: soit $y \in f(A)$. Posons $a \in A$ tel que $f(a) = y$.

Comme $a \in A \subset A + \text{Ker} f \subset B + \text{Ker} f$, on peut écrire $a = b + x$ avec $b \in B$ et $x \in \text{Ker} f$.

Puis $y = f(a) = f(b + x) = f(b) + f(x) = f(b) \in f(B)$.

Donc $f(A) \subset f(B)$.

D'où l'inclusion.

D'où la réciproque.