

Interrogation 15

Exercice 1 On considère (u_n) définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2.$$

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner le signe de $f - \text{id}$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Représenter la courbe de f ainsi que la première bissectrice (restreints à $\mathbb{R}_+$) sur un même repère.
3. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
4. En déduire que (u_n) est monotone, et déterminer le sens de variations de (u_n) ainsi que sa limite en fonction de la valeur de u_0 .

Exercice 2 Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, et en donner des bases :

1. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x + 2y + 3z + 4t = 0\}$;
2. $\{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y'' = 4y' - 3y\}$.

Exercice 3 Soient (x, y, z) une famille libre d'un espace vectoriel E . Montrer que la famille $(y + z, z + x, x + y)$ est libre.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ croissante telle que $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice 5 Soit f continue sur le segment $[a; b]$. Montrer que f possède un point fixe dans les cas suivants :

1. si $f([a; b]) \subset [a; b]$;
2. si $[a; b] \subset f([a; b])$.

Exercice 6 Montrer que les applications suivantes sont linéaires, et donner une base de leur image et de leur noyau. Dire à chaque fois si l'application est injective, surjective ou bijective.

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x + y, x - 2y, 0) \end{cases} ;$
2. $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x, x, x) \end{cases} .$

Exercice 7 Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si A, B sont deux sev de E , montrer que :

$$f(A) \subset f(B) \Leftrightarrow A + \text{Ker} f \subset B + \text{Ker} f.$$