

Nom :

---

## Interrogation 14

**Exercice 1** Soit  $E$  un espace vectoriel :

1. Donner la définition de  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .
2. Pour  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , donner les définitions de  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  : comment lit-on sur ces ensembles l'injectivité ou la surjectivité de  $f$  ?

**Exercice 2** 1. Énoncer, avec des quantificateurs, le fait qu'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  tende vers 3 en 0.

2. Soit  $f$  continue sur  $[-12; 37]$  à valeurs dans  $] -1; 1[$  et  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $[-12; 37]$  quelconque.
  - (a) Montrer qu'il existe  $M \in [0; 1[$  tel que :  $\forall x \in [-12; 37], |f(x)| \leq M$ .
  - (b) En déduire que la suite  $(y_n) = ((f(x_n))^n)$  converge.

**Exercice 3** On considère les ensembles  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $g_1 : x \mapsto e^x$  et  $g_2 : x \mapsto xe^x$ . On pose  $\varphi : f \mapsto f'' - 2f' + f$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. En déduire que  $F = \{f \in E \mid f'' - 2f' + f = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
Et montrer que la famille  $(g_1, g_2)$  est une base de  $F$ . On donnera en particulier, pour  $f \in E$ , ses coordonnées dans la base  $(g_1, g_2)$  le plus simplement possible.
3. La fonction  $\varphi$  est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?
4. Montrer que, pour tout  $f \in E$ , il existe des uniques  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $f - (\lambda g_1 + \mu g_2)$  et sa dérivée s'annulent en 0 (on les donnera explicitement).
5. En déduire que  $H = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ .