

Nom :

Interrogation 10

Exercice 1 Donner un équivalent en a et les limites des quantités suivantes :

1. $a = 0$: $\frac{x \tan(x)}{\cos(x) + \sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$
2. $a = 3$: $\ln(1+x) - 2\ln(2) = \ln\left(\frac{1+x}{4}\right) \underset{x \rightarrow 3}{\sim} \frac{1+x}{4} - 1 \underset{x \rightarrow 3}{\sim} \frac{x-3}{4} \underset{x \rightarrow 3}{\rightarrow} 0$
3. $a = 2$: en posant $x = 2 + h$: $\sqrt{x} - \sqrt{2} = \sqrt{2+h} - \sqrt{2} = \sqrt{2}((1+h/2)^{1/2} - 1) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{h}{2} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{2}h}{4} \underset{x \rightarrow 2}{\sim} \frac{\sqrt{2}(x-2)}{4} \underset{x \rightarrow 2}{\rightarrow} 0$
4. $a = +\infty$: $\frac{xe^x + e^x \ln(x) - x^5}{x^2 + x^3 e^x - \sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{xe^x}{x^3 e^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$
5. $a = 0^+$: $\frac{x \ln(x)}{x^2 + x^3} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x \ln(x)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} -\infty$

Exercice 2 Soit E un ensemble non vide et A une partie de E .

1. Donner la définition d'un recouvrement de E . À quelle condition $(A, \overline{A})$ est un recouvrement de E ?
2. Donner la définition d'une partition de E . À quelle condition $(A, \overline{A})$ est une partition de E ?

1. Un recouvrement est une famille de sous-ensembles de E dont l'union vaut E .

La famille $(A, \overline{A})$ est toujours un recouvrement de E : tout élément de E est ou bien dans A , ou bien pas dans A (donc dans $\overline{A}$), donc $E = A \cup \overline{A}$.

2. Une partition est un recouvrement dont les éléments sont tous non vides et deux-à-deux disjoints. Comme A et $\overline{A}$ sont toujours disjoints, la famille $(A, \overline{A})$ est une partition de E si, et seulement si, A et $\overline{A}$ sont non-vides, c'est-à-dire que $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$

Exercice 3 soit A, B, C trois ensembles. On suppose que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.

On donne deux preuves :

- Preuve “classique” d’inclusion :

- $A \subset B$: soit $a \in A$. Alors $a \in A \cup B$. Donc $a \in B \cap C$. Donc $a \in B$. D’où l’inclusion.
- $B \subset C$: soit $b \in B$. Alors $b \in A \cup B$. Donc $b \in B \cap C$. Donc $b \in C$. D’où l’inclusion.

- Par opérations sur les ensembles :

- Par définition, on a : $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.
- Par définition également : $B \cap C \subset B$ et $B \cap C \subset C$.

Et par transitivité, en combinant ces inclusions avec le fait que $A \cup B = B \cap C$: $A \subset B$ et $B \subset C$.

Exercice 4 Soit $f : E \rightarrow F$ une application, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$.

1. Donner les définitions de f injective, surjective, bijective.
2. Dire de $f(A)$ et $f(B)$ l’ensemble qui a un sens, et caractériser simplement le fait que y soit un de ses éléments.
3. Dire de $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(B)$ l’ensemble qui a un sens, et caractériser simplement le fait que x soit un de ses éléments.
4. On considère $f : x \mapsto x^2$. Donner sans justifier les ensembles suivants :

- (a) $f([0; 1])$
- (b) $f([-4; 7])$
- (c) $f^{-1}([0; 1])$
- (d) $f([-4, 7])$.

1. f est :

- injective si tout élément de F possède au plus un antécédent par f dans E ;
- surjective si tout élément de F possède au moins un antécédent par f dans E ;
- bijective si tout élément de F possède exactement un antécédent par f dans E .

2. C'est $f(A)$ qui a un sens et on a :

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x).$$

3. C'est $f^{-1}(B)$ qui a un sens et on a :

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

4. On a d'après les variations de f :

$$f([0; 1]) =]0; 1], f([-4; 7]) = [0; 49[, f^{-1}(]0; 1]) = [-1; 0[\cup]0; 1] \text{ et } f^{-1}([-4; 7]) =]-\sqrt{7}, \sqrt{7}[.$$