

MATHÉMATIQUES PCSI 2026–2027

Thomas MEGARBANE

Table des matières

1	Logique et raisonnements	1
I	Assertions	1
II	Quantificateurs	2
III	Implications, réciproques, contraposées et équivalences	3
IV	Méthodes de raisonnements	4
2	Rappels et compléments de calculs	9
I	Les ensembles de nombres usuels	9
II	Intervalles et inégalités dans $\mathbb{R}$	10
III	Racines et puissances	11
IV	Manipuler des égalités et des inégalités	12
V	La valeur absolue	13
VI	La partie entière	16
VII	Équations et inéquations de degré 2 ou moins	17
VIII	Techniques de résolutions d'équations et d'inéquations	19
3	Rappels et compléments sur les fonctions numériques	23
I	Généralités sur les fonctions	23
II	Fonctions affines	29
III	Tracé d'une fonction	30
IV	Continuité et dérivation	34
4	Sommes, produits et systèmes	43
I	Les notations $\sum$ et $\prod$	43
II	Sommes classiques	45
III	Factorielle et coefficients binomiaux	48
IV	Résolution de systèmes linéaires	52
5	Les fonctions usuelles	57
I	Logarithmes, exponentielles et puissances	57
II	Les fonctions circulaires	67

Chapitre 1

Logique et raisonnements

I Assertions

Définition I.1. On appelle **assertion** (ou **proposition**) une phrase qui est soit vraie soit fausse (et pas les deux).

Une assertion peut dépendre d'une variable x , et on la note alors $A(x)$.

On dit que deux assertions A et B sont **équivalentes**, ce que l'on note $A \equiv B$, si elles ont toujours la même valeur de vérité.

Exemples I.2.

1. "2 est plus petit que 3" est une assertion vraie ;
2. "3 est plus grand que 5" est une assertion fausse ;
3. l'assertion $A(x) = \text{"}x \text{ est un nombre premier"}$ dépend de x : elle est vraie si $x = 2$ et fausse si $x = 10$ par exemple.

Définition I.3. Si A et B sont deux assertions, on définit les assertions suivantes :

1. $(\text{non } A)$: qui est vraie si A est fausse, et fausse sinon, qu'on appelle la **négation**, notée $\neg A$;
2. $(A \text{ ou } B)$: qui est vraie si l'une des deux assertions est vraie, et fausse sinon, qu'on appelle la **disjonction**, notée $A \vee B$;
3. $(A \text{ et } B)$: qui est vraie si les deux assertions sont vraies, et fausse sinon, qu'on appelle la **conjonction**, notée $A \wedge B$.

Exemples I.4. Si $A = \text{"}n \text{ est un multiple de 2"}$ et $B = \text{"}n \text{ est un multiple de 3"}$, alors :

1. $(\text{non } A) = \text{"}n \text{ est impair"}$
2. $(A \text{ ou } B) = \text{"}n \text{ est divisible soit par 2, soit par 3"}$
3. $(A \text{ et } B) = \text{"}n \text{ est un multiple de 6"}$ (par théorème de Gauss)

Définition I.5. On appelle **table de vérité** d'une assertion le tableau donnant sa valeur de vérité en fonction de celles des assertions utilisées pour la construire.

Exemples I.6. La négation, la disjonction et la conjonction ont pour tables de vérité :

A	$\text{non } A$	A	B	$A \text{ ou } B$	A	B	$A \text{ et } B$
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F	F

Proposition I.7. Si A, B, C sont des assertions, on a les propriétés suivantes :

1. $\text{non}(\text{non } A) \equiv A$;
2. $(A \text{ et } B) \text{ et } C \equiv A \text{ et } (B \text{ et } C)$;
3. $(A \text{ ou } B) \text{ ou } C \equiv A \text{ ou } (B \text{ ou } C)$;
4. $A \text{ et } (B \text{ ou } C) \equiv (A \text{ et } B) \text{ ou } (A \text{ et } C)$;
5. $A \text{ ou } (B \text{ et } C) \equiv (A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ ou } C)$;
6. $\text{non}(A \text{ et } B) \equiv [(\text{non } A) \text{ ou } (\text{non } B)]$;
7. $\text{non}(A \text{ ou } B) \equiv [(\text{non } A) \text{ et } (\text{non } B)]$.

Démonstration. Par exemple, montrons la dernière. On procède par table de vérité :

A	B	$A \text{ ou } B$	$\text{non}(A \text{ ou } B)$	$\text{non } A$	$\text{non } B$	$(\text{non } A) \text{ et } (\text{non } B)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

□

II Quantificateurs

Définition II.1. Soit $A(x)$ une assertion dépendant de x , qui décrit un ensemble E :

1. Si, lorsque x décrit E , $A(x)$ est toujours vraie, on écrit :

$$\forall x \in E, A(x)$$

qu'on lit "quel que soit x appartenant à E , $A(x)$ ". C'est le **quantificateur universel**.

2. S'il existe x dans E tel que $A(x)$ est vraie, on écrit :

$$\exists x \in E, A(x)$$

qu'on lit "il existe x appartenant à E tel que $A(x)$ ". C'est le **quantificateur existentiel**.

Proposition II.2. Avec les mêmes notations, on a :

1. $\text{non}(\forall x \in E, A(x)) \equiv \exists x \in E, (\text{non } A(x))$;
2. $\text{non}(\exists x \in E, A(x)) \equiv \forall x \in E, (\text{non } A(x))$;

Remarques II.3. 1. S'il existe un unique x pour lequel $A(x)$ est vrai, on écrit : $\exists! x \in E, A(x)$.

2. L'ordre des quantificateurs est important. Par exemple les assertions :

$$[\forall x \in E, \exists y \in E, A(x, y)] \text{ et } [\exists y \in E, \forall x \in E, A(x, y)]$$

ne sont pas les mêmes : dans la première, y dépend de x ; dans la seconde, y est indépendant de x .

Exemples II.4. 1. L'assertion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n < m$$

veut dire que : pour tout entier naturel n , il existe un entier naturel m tel que $n < m$. Elle est vraie : pour n fixé, l'entier $m = n + 1$ convient.

2. L'assertion :

$$\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n < m$$

veut dire que : il existe un entier naturel m tel que, pour tout entier naturel n , $n < m$. Elle est fausse : si $n = m$ par exemple, on ne pourra avoir $n < m$.

III Implications, réciproques, contraposées et équivalences

Définition III.1. Soient A, B sont deux assertions.

1. si, dès que A est vraie, alors B est aussi vraie : on dit que A **implique** B , que l'on note $A \Rightarrow B$ ou $B \Leftarrow A$ et que l'on lit "si A alors B "; on dit alors que : A est une condition **suffisante** pour B , ou que B est une condition **nécessaire** pour A .
2. si A implique B et que B implique A : on dit que A est **équivalent** à B , que l'on note $A \Leftrightarrow B$ ou $B \Leftrightarrow A$ et que l'on lit " A si et seulement si B "; on dit alors que : A est une condition **nécessaire et suffisante** pour B .

Les tables de vérités correspondantes sont :

A	B	$A \Rightarrow B$	A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V

Remarque III.2. L'implication $A \Rightarrow B$ ne donne pas les valeurs de vérité de A et de B : elle fait juste un lien entre les deux.

Exemples III.3. 1. si n est un entier, alors " n est un multiple de 6" est une condition suffisante, mais non nécessaire, pour que n soit pair.

2. si x est un réel, alors " $x^2 = 1$ " est une condition nécessaire, mais non suffisante, pour que x soit égal à 1 ;

3. si x est un réel, les assertions " $x^3 = -1$ " et " $x = -1$ " sont équivalentes.

Proposition III.4. Si A, B sont deux assertions, alors :

1. $(A \Rightarrow B) \equiv [(non\ A) \text{ ou } B]$;
2. $[non\ (A \Rightarrow B)] \equiv [A \text{ et } (non\ B)]$;
3. $(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \text{ et } B) \text{ ou } ((non\ A) \text{ et } (non\ B))$;
4. $non\ (A \Leftrightarrow B) \equiv (A \text{ et } (non\ B)) \text{ ou } ((non\ A) \text{ et } B)$.

Démonstration. Par tables de vérité. Montrons par exemple la première :

A	B	$A \Rightarrow B$	$non\ A$	$[(non\ A) \text{ ou } B]$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

□

Proposition-Définition III.5. Si A et B sont deux assertions :

1. on appelle **réciproque** de l'implication $A \Rightarrow B$ l'implication $B \Rightarrow A$: il n'y a pas de lien de vérité entre une implication et sa réciproque ;
2. on appelle **contraposée** de l'implication $A \Rightarrow B$ l'implication $(non\ B) \Rightarrow (non\ A)$: une implication et sa contraposée ont même valeur de vérité, elles sont équivalentes.

Démonstration.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	non B	non A	$(\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A)$
V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

□

Remarque III.6. Pour la contraposée, on pouvait aussi constater que :

$$(A \Rightarrow B) \equiv ((\text{non } A) \text{ ou } B) \equiv ((\text{non } (\text{non } B)) \text{ ou } (\text{non } A)) \equiv ((\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A)).$$

IV Méthodes de raisonnements

IV.1 Raisonnement par déduction

Méthode IV.1. Pour montrer l'implication $A \Rightarrow B$, on peut supposer que A est vraie et montrer alors que B est vraie.

Pour montrer l'équivalence $A \Leftrightarrow B$, on peut montrer séparément que les implications $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ sont vraies.

Pour prouver que A et B , on montre séparément que A et B sont vraies.

Pour prouver que A ou B , on peut supposer que A est fausse, et montrer alors que B est vraie.

Remarques IV.2.

1. L'utilisation d'exemple repose sur l'implication :

$$(x \in E \text{ et } A(x)) \Rightarrow \exists x \in E, A(x).$$

2. Un contre-exemple repose sur l'implication :

$$(x \in E \text{ et non } A(x)) \Rightarrow \text{non}(\forall x \in E, A(x)).$$

IV.2 Raisonnement par disjonction de cas

Méthode IV.3. Lorsqu'une assertion $A(x)$ dépend d'une variable x qui prend des valeurs dans E ou dans F , pour montrer que $A(x)$ est vraie, on peut montrer que :

1. $A(x)$ est vraie pour x décrivant E ;
2. $A(x)$ est vraie pour x décrivant F .

Remarque IV.4. Les raisonnements par tables de vérités sont des raisonnements par disjonction de cas.

Exemple IV.5. Montrer que, pour tout entier naturel n , le nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

On procède par disjonction de cas :

— 1er cas : si n est pair : on pose $n = 2m$ pour $m \in \mathbb{N}$, et alors :

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2m(n+1)}{2} = \underbrace{m}_{\in \mathbb{N}} \underbrace{(n+1)}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{N};$$

— 2nd cas : si n est impair : on pose $n = 2m + 1$ pour $m \in \mathbb{N}$, et alors :

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(2m+2)}{2} = \underbrace{n}_{\in \mathbb{N}} \underbrace{(m+1)}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}.$$

Et donc pour tout entier naturel n , on a bien que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

IV.3 Raisonnement par contraposition

Méthode IV.6. Pour montrer l'implication $A \Rightarrow B$, on peut montrer sa contraposée $(\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A)$. On peut donc supposer que B est fausse, et montrer alors que A est fausse.

Exemple IV.7. Montrer que si n est un entier tel que n^2 est pair, alors n est pair.

On procède par contraposée. On souhaite donc montrer que, si n est un entier naturel impair, alors n^2 est impair.

Soit donc $n \in \mathbb{N}$ impair. On écrit $n = 2m + 1$ pour $m \in \mathbb{N}$. Et alors :

$$n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2 \cdot \underbrace{(2m^2 + 2m)}_{\in \mathbb{N}} + 1$$

qui est bien impair. Ce qui prouve la contraposée.

D'où le résultat cherché.

IV.4 Raisonnement par l'absurde

Méthode IV.8. Pour montrer qu'une assertion est vraie, on peut montrer qu'elle n'est pas fausse. Pour cela, on suppose que l'assertion est fausse, et on cherche à aboutir à une contradiction, ou à une assertion dont on sait qu'elle est fausse.

Remarque IV.9. Beaucoup de raisonnements par l'absurde peuvent être remplacés par des raisonnements par contraposition (et inversement).

Exemple IV.10. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Par l'absurde, supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. On écrit alors : $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ sous forme irréductible, c'est-à-dire que $a, b \in \mathbb{N}$ sont sans diviseur commun autre que 1.

En élevant au carré, il vient : $2 = \frac{a^2}{b^2}$, et donc :

— $a^2 = 2b^2$ est pair, donc a est pair, et on peut écrire $a = 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$;

— en réinjectant, il vient : $b^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{(2n)^2}{2} = \frac{4n^2}{2} = 2n^2$ est pair, donc b est pair.

D'où la contradiction, car alors 2 diviserait a et b .

IV.5 Raisonnement par analyse-synthèse

Méthode IV.11. Pour montrer qu'un problème admet une unique solution, on peut procéder en deux temps :

- l'**analyse** : on montre qu'une hypothétique solution est nécessairement d'une certaine forme (ce qui réduit les solutions possibles) ;
- la **synthèse** : on regarde, parmi les solutions possibles de l'analyse, lesquelles sont bien des solutions.

Remarque IV.12. C'est un raisonnement approprié lorsqu'il est plus facile de procéder par implications plutôt que par équivalences.

Exemple IV.13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x+2} = x$.

1. analyse : soit x solution de l'équation. Alors $\sqrt{x+2} = x$. Donc $x+2 = x^2$. Donc $x^2 - x - 2 = 0$.

On arrive donc à une équation polynomiale du second degré, que l'on sait résoudre. On a $\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2$, donc les solutions possibles sont $x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$.

2. synthèse : $\sqrt{x_1+2} = 1 \neq -1 = x_1$ et $\sqrt{x_2+2} = 2 = x_2$, donc l'unique solution au problème est 2.

Exemple IV.14. Montrer que toute fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. analyse : on suppose qu'il existe deux fonctions $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que : g est paire, h est impaire et $f = g + h$. Si $x \in \mathbb{R}$, on a ainsi :

$$\begin{cases} g(-x) = g(x) \\ h(-x) = -h(x) \\ f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) \end{cases}$$

donc $g(x)$ et $h(x)$ sont solutions du système :

$$\begin{cases} g(x) + h(x) = f(x) \\ g(x) - h(x) = f(-x) \end{cases}$$

En prenant la somme et la différence des deux lignes du système, on trouve :

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

donc **nécessairement** g et h sont définies par les formules ci-dessus.

2. synthèse : considérons g, h définies par les formules ci-dessus. Alors, si $x \in \mathbb{R}$, on a :
- $g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$, donc g est paire ;
 - $h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$, donc h est impaire ;
 - $g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$, donc $f = g + h$.

Ce qui montre bien l'existence et l'unicité d'une telle écriture.

Remarque IV.15. Un problème où on montre existence et unicité d'une solution se prête bien à un raisonnement par analyse-synthèse : l'analyse montre l'unicité, et la synthèse l'existence.

IV.6 Raisonnement par récurrence

Théorème IV.16 (récurrence simple). Soit $A(n)$ une assertion dépendant de n décrivant $\mathbb{N}$. On suppose que :

- $A(0)$ est vraie ;
- pour tout $n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Alors $A(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème IV.17 (récurrence d'ordre k). Soit $A(n)$ une assertion dépendant de n décrivant $\mathbb{N}$, et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- $A(0), A(1), \dots, A(k-1)$ sont vraies ;
- pour tout $n \in \mathbb{N} : (A(n) \text{ et } A(n+1) \text{ et } \dots \text{ et } A(n+k-1)) \Rightarrow A(n+k)$.

Alors $A(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème IV.18 (récurrence forte). Soit $A(n)$ une assertion dépendant de n décrivant $\mathbb{N}$. On suppose que :

- $A(0)$ est vraie ;
- pour tout $n \in \mathbb{N} : (A(0) \text{ et } A(1) \text{ et } \dots \text{ et } A(n)) \Rightarrow A(n+1)$.

Alors $A(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple IV.19. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- initialisation : si $n = 0$, on a :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 0 = \sum_{k=0}^0 k^2.$$

— *hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2 \stackrel{HR}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{n+1}{6} [n(2n+1) + 6(n+1)] \\ &= \frac{n+1}{6} (2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

D'où l'hérédité.

D'où la récurrence.

Exemple IV.20. On considère la suite (u_n) , définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3 \cdot u_{n+1} - 2 \cdot u_n$$

Alors on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 1$, ce que l'on montre par récurrence double :

- *initialisation* : on a $u_0 = 0$ et $2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et $u_1 = 1$ et $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$ donc pour $n = 0$ et $n = 1$ le résultat est vérifié ;
- *hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2^n - 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$. Alors :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \stackrel{HR}{=} 3(2^{n+1} - 1) - 2(2^n - 1) = (3 \times 2 - 2)2^n - 3 + 2 = 4 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+2} - 1$$

Ce qui prouve l'hérédité.

D'où la récurrence.

Exemple IV.21. On montrera, avec un récurrence forte que tout entier naturel non nul s'écrit (de manière unique) comme produit de nombres premiers.

Chapitre 2

Rappels et compléments de calculs

I Les ensembles de nombres usuels

Définition I.1. On définit les ensembles de nombres suivants :

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ l'ensemble des **entiers naturels** ;
2. $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ l'ensemble des **entiers relatifs** ;
3. $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ l'ensemble des **rationnels** ;
4. $\mathbb{R}$ l'ensemble des abscisses d'une droite graduée, l'ensemble des **réels** ;
5. $\mathbb{C}$ l'ensemble nombres de la forme $a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$, l'ensemble des **complexes**

Et on note $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ les mêmes ensembles privés de 0.

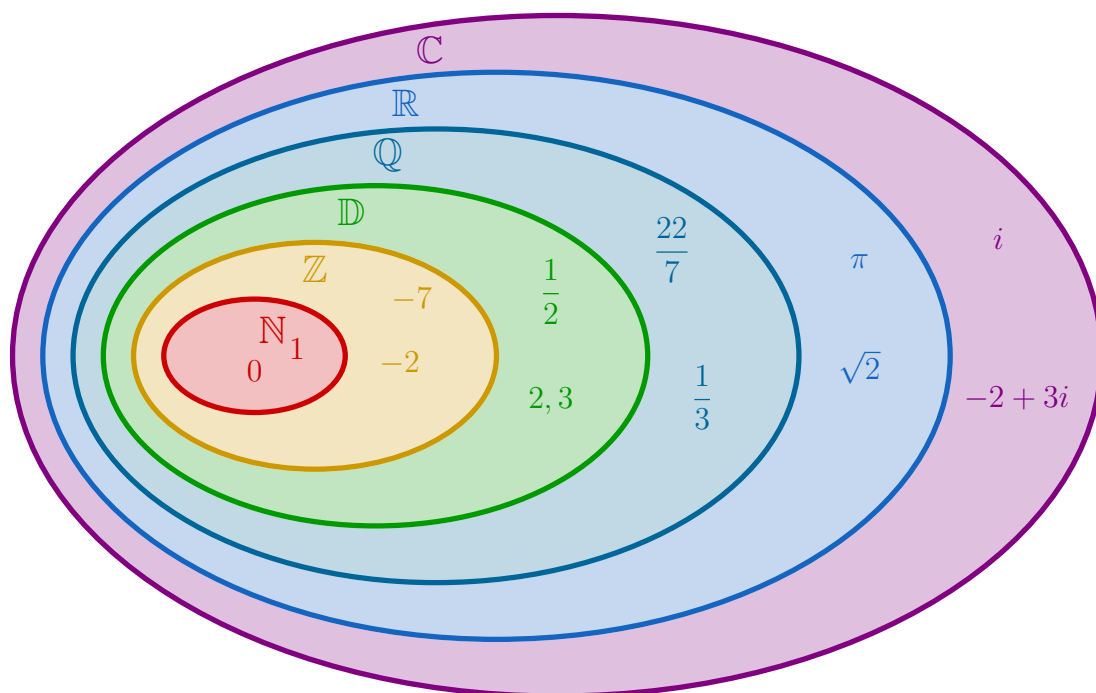
L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est appelé l'ensemble des **irrationnels**.

Remarque I.2. On considère parfois aussi l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres **décimaux** : $\mathbb{D} = \{\frac{n}{10^m} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$.

Proposition I.3. On a les inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

et ces inclusions sont strictes.



II Intervalles et inégalités dans $\mathbb{R}$

Définition II.1. Si $a, b \in \mathbb{R}$, on définit le **segment** $[a; b]$ comme :

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

On dit qu'un ensemble non vide I de $\mathbb{R}$ est un **intervalle** s'il vérifie que :

$$\forall a, b \in I, [a; b] \subset I.$$

Remarque II.2. Cela revient à dire qu'un intervalle contient tous les réels entre deux de ses éléments.

Exemples II.3.

1. si $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $I = \{\alpha\}$ est un intervalle :
 - $\alpha \in I$ par définition, donc I est non vide ;
 - soient $a, b \in I$, et $x \in [a; b]$: comme $a, b \in I$, alors $a = b = \alpha$; et ainsi $\alpha \leq x \leq \alpha$, donc $x = \alpha$ appartient bien à I . Et donc $[a, b] \subset I$;
 ce qui prouve bien que I est un intervalle.
2. tout segment non vide est un intervalle : si $I = [\alpha; \beta]$ pour $\alpha \leq \beta$, alors :
 - $\alpha \in I$, comme $\alpha \leq \alpha \leq \beta$, donc I est non vide ;
 - soient $a, b \in I$ et $x \in [a, b]$: alors $a \leq x \leq b$. Mais :
 - $a \in I$, donc $\alpha \leq a \leq \beta$;
 - $b \in I$, donc $\alpha \leq b \leq \beta$;
 et ainsi ; $\alpha \leq a \leq x \leq b \leq \beta$, donc $\alpha \leq x \leq \beta$, donc $x \in I$. Et donc $[a, b] \subset I$.
donc I est un intervalle.
3. si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifient $\alpha < \beta$, alors $J =]\alpha; \beta[= \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}$ est un intervalle :
 - $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \in I$: on a en effet que $\alpha < \beta$, et donc :

$$\gamma - \alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha = \frac{\beta - \alpha}{2} > 0 \text{ et } \gamma - \beta = \frac{\alpha - \beta}{2} < 0$$
 et donc $\alpha < \gamma < \beta$, donc $\gamma \in J$;
 - soient $a, b \in J$ et $x \in [a, b]$: alors $a \leq x \leq b$. Mais :
 - $a \in J$, donc $\alpha < a (< \beta)$;
 - $b \in J$, donc $(\alpha <) b < \beta$;
 et ainsi ; $\alpha < a \leq x \leq b < \beta$, donc $\alpha < x < \beta$, donc $x \in J$. Et donc $[a, b] \subset J$.
donc J est un intervalle.
 - 4. $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle car : $-1, 1 \in \mathbb{R}^*$ mais $0 \in [-1; 1]$ n'est pas dans $\mathbb{R}^*$, donc on n'a pas l'inclusion $[-1; 1] \subset \mathbb{R}^*$;
 - 5. $\mathbb{N}$ n'est pas un intervalle car : $0 \in \mathbb{N}$ et $1 \in \mathbb{N}$ mais $\frac{1}{2} \in [0; 1]$ n'est pas dans $\mathbb{N}$, donc on n'a pas l'inclusion $[0; 1] \subset \mathbb{N}$.

Proposition II.4. Tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$ est d'une (et une seule) des formes suivantes, où a, b désignent des réels tels que $a < b$:

1. $\{a\}$;
2. $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$;
3. $[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$;
4. $]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$;
5. $]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$;

6. $[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$;
7. $]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$;
8. $] - \infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$;
9. $] - \infty; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$;
10. $\mathbb{R}$.

Définition II.5. Les intervalles précédents définis par des inégalités strictes (resp. larges) sont appelés des **intervalles ouverts** (resp. **intervalles fermés**).

Plus généralement, si I est un intervalle, on appelle :

- **intérieur** de I , noté $\overset{\circ}{I}$, l'intervalle I privé de ses bornes ;
- **adhérence** de I , noté $\bar{I}$, l'intervalle I auquel on rajoute ses bornes.

Remarques II.6.

1. Prendre l'intérieur, c'est "ouvrir" l'intervalle : $\overset{\circ}{I}$ est le plus grand intervalle ouvert inclus dans I (et éventuellement l'ensemble vide).
2. Prendre l'adhérence, c'est "fermer" l'intervalle : $\bar{I}$ est le plus petit intervalle fermé contenant I .

III Racines et puissances

Définition III.1. Si $x \geq 0$, on appelle sa **racine carrée**, notée $\sqrt{x}$, comme l'unique réel positif ou nul dont le carré vaut x .

Remarque III.2. Comme $x^2 = (-x)^2$, alors $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Proposition III.3. Soient x, y positifs. Alors :

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \text{ et } \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \text{ (si } y \neq 0\text{)}.$$

Démonstration. Par définition, on a $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ sont positifs, donc leur produit aussi. Et :

$$(\sqrt{x}\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2(\sqrt{y})^2 = xy$$

d'où la première égalité. On procède de même pour le quotient. □

Remarques III.4.

1. on utilise les carrés parfaits pour simplifier les racines : 1, 4, 9, 16, 25, 36, ..., 289, 324, 361, ... ;
2. on évite de garder des racines au dénominateur dans un quotient. On simplifie une fraction en multipliant par $\sqrt{a}$, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ou $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ pour les faire disparaître.

Exemples III.5.

1. $\sqrt{180} = \sqrt{36 \times 5} = 6\sqrt{5}$;
2. $\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$;
3. $\frac{1}{\sqrt{11} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{11} + \sqrt{3}}{8}$.

Définition III.6. Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{x \cdots x}_{n \text{ fois}} & \text{si } n > 0 \end{cases}.$$

Si $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}_-$, on note :

$$x^n = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n} = \frac{1}{\underbrace{x \cdots x}_{(-n) \text{ fois}}}.$$

Remarque III.7. On peut aussi définir x^n (pour $n \in \mathbb{N}$) récursivement, par :

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ x \cdot x^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}.$$

Proposition III.8. Si $x, y \in \mathbb{R}$ et $n, m \in \mathbb{N}$:

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n, \quad x^{mn} = (x^m)^n = (x^n)^m, \quad (xy)^n = x^n y^n$$

et ces formules restent valables pour $n, m \in \mathbb{Z}$ si $x, y \neq 0$.

IV Manipuler des égalités et des inégalités

Proposition IV.1. Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors :

1. si $c \neq 0$: $a = b$ si, et seulement si, $ac = bc$;
2. si $a = b$, alors $a^2 = b^2$;
3. $ab = 0$ si, et seulement si, $a = 0$ ou $b = 0$;
4. pour tout fonction f définie en a et b : si $a = b$, alors $f(a) = f(b)$.

Remarque IV.2. La dernière proposition n'est en général pas une équivalence. Par exemple, pour une fonction constante, l'égalité $f(a) = f(b)$ est vérifiée peu importe la valeur de a et b .

De manière moins extrême, on verra que : $\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow a = \pm b + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On a une équivalence si tout élément possède au plus un antécédent par f , comme dans l'exemple qui suit.

Exemple IV.3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrons que $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$:

- si $a = b$: alors en appliquant la fonction $\exp$: $e^a = e^b$;
- si $e^a = e^b$: alors en appliquant la fonction $\ln$: $\ln(e^a) = \ln(e^b)$, c'est-à-dire $a = b$.

Ce qui montre l'équivalence voulue.

Proposition IV.4. La relation $\leq$ est compatible avec l'addition et la multiplication de la manière suivante :

1. si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $(a \leq b \text{ et } c \leq d) \Rightarrow a + c \leq b + d$;
2. si $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $c \geq 0$: $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$;
3. si $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $c \leq 0$: $a \leq b \Rightarrow bc \leq ac$;
4. si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $(0 < a \leq b \text{ et } 0 < c \leq d) \Rightarrow 0 < ac \leq bd$.

Remarque IV.5. On ne divise ni ne soustrait des inégalités. On se ramène à des additions ou des multiplications en utilisant :

- si $a, b \in \mathbb{R}$: $a \leq b \Leftrightarrow -b \leq -a$;
- si $a, b \in \mathbb{R}^*$ sont de même signe : $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

Méthode IV.6. Étant donnés deux réels a, b positifs :

1. pour majorer $a + b$, il suffit de majorer a et b ;
2. pour majorer $a - b$, il suffit de majorer a et de minorer b ;
3. pour majorer $a \times b$, il suffit de majorer a et b ;
4. pour majorer $\frac{a}{b}$, il suffit de majorer a et de minorer b .

Et on a des résultats analogues pour les minorations.

Exemple IV.7. Supposons que $a \in [1; 4]$ et $b \in [1/2; 3]$. Alors :

1. $a + b \in [3/2; 7]$;
2. $a - b \in [-2; 7/2]$;
3. $a \times b \in [1/2; 12]$;
4. $\frac{a}{b} \in [1/3; 8]$.

Proposition IV.8. Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors :

- $ab > 0$ si, et seulement si, a et b sont non nuls de même signe ;
- si $ab < 0$ si, et seulement si, a et b sont non nuls de signes opposés.

Démonstration. Par disjonction de cas. □

Proposition IV.9. Si $a_1, \dots, a_n$ sont des réels de même signe, alors :

$$a_1 + \dots + a_n = 0 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_n = 0.$$

Démonstration. On montre séparément les deux implications :

$\Leftarrow$ si $a_1 = \dots = a_n = 0$, alors on a bien $a_1 + \dots + a_n = 0$;

$\Rightarrow$ Quitte à tout multiplier par -1 on peut supposer que les a_i sont positifs ou nuls.

Raisonnons par contraposée : on suppose que l'un des a_i est non nul, c'est-à-dire qu'il existe $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $a_{i_0} > 0$.

Mais comme tous les a_i sont positifs ou nuls, alors :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq a_{i_0} > 0$$

donc $a_1 + \dots + a_n \neq 0$. □

V La valeur absolue

Définition V.1. Si $x \in \mathbb{R}$, on appelle **valeur absolue** de x , notée $|x|$ le réel :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarques V.2. 1. Une valeur absolue est toujours positive ou nulle.

2. Si $x \in \mathbb{R}$: $-|x| \leq x \leq |x|$, et l'une des deux inégalités est une égalité.

Proposition V.3. Si $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $|x| = \sqrt{x^2}$;
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

3. $|xy| = |x| \times |y|$ et $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ (pour $y \neq 0$);
4. $|x| = |y| \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x = -y)$;
5. $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$ et $|x| \geq y \Leftrightarrow x \geq y \text{ ou } x \leq -y$.

Démonstration.

1. déjà vu avec les racines;
2. découle du 1.;
3. découle du 1.;
4. On procède par disjonction de cas :
 - si x et y sont de même signe :

$$|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x = -y)$$

car, x et y ayant même signe, l'assertion $x = -y$ est soit fausse (donc ne change pas la valeur de vérité), soit vraie, mais alors $x = y = 0$, donc l'assertion $x = y$ est déjà vraie;

- si x et y sont de signes opposés :

$$|x| = |y| \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow (x = -y \text{ ou } x = y)$$

car, x et y ayant des signes opposés, l'assertion $x = y$ est soit fausse (donc ne change pas la valeur de vérité), soit vraie, mais alors $x = y = 0$, donc l'assertion $x = -y$ est déjà vraie;

5. On procède par disjonction de cas :
 - si $x \geq 0$: alors $|x| = x$ et donc :

$$|x| \leq y \Leftrightarrow 0 \leq x \leq y \Leftrightarrow -y \leq 0 \leq x \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y.$$

- si $x \leq 0$: alors $|x| = -x$ et donc :

$$|x| \leq y \Leftrightarrow 0 \leq -x \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq 0 \Leftrightarrow -y \leq x \leq y.$$

ce qui prouve la première équivalence.

On procède de même pour la seconde équivalence :

- si $x \geq 0$:

$$|x| \geq y \Leftrightarrow x \geq y \Leftrightarrow (x \geq y \text{ ou } x \leq -y)$$

où la dernière équivalence vient du fait que :

- si $y > 0$: alors $x \leq -y$ est fausse, donc ne change pas la valeur de vérité;
- si $y \leq 0$: alors $x \geq y$ est vraie, donc la valeur de $x \leq -y$ n'a pas d'incidence;
- si $x \leq 0$:

$$|x| \geq y \Leftrightarrow -x \geq y \Leftrightarrow x \leq -y \Leftrightarrow (x \geq y \text{ ou } x \leq -y)$$

où la dernière équivalence vient du fait que :

- si $y > 0$: alors $x \geq y$ est fausse, donc ne change pas la valeur de vérité;
- si $y \leq 0$: alors $x \leq -y$ est vraie, donc la valeur de $x \geq y$ n'a pas d'incidence;

□

Remarques V.4.

1. si $y < 0$, alors les équivalences dans 5 sont triviales (dans le sens où elles sont non seulement évidentes, mais qu'en plus elles n'apportent rien comme information) :
 - l'inégalité $|x| \leq y$ sera toujours fausse, de même que l'inégalité $-y \leq x \leq y$ (car elle impliquerait que $-y \leq y$, qui est évidemment fausse);

— l'inégalité $|x| \geq y$ sera toujours vraie, comme le fait que $x \geq y$ ou que $x \leq -y$. On a en effet :

$$\begin{cases} x \geq y & \Leftrightarrow x \in [y; +\infty[\\ x \leq -y & \Leftrightarrow x \in]-\infty; -y] \end{cases}$$

et l'union de ces deux intervalles forme bien toute la droite des réels.

2. Si $y \geq 0$, on a même : $|x| \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$ et $|x| \geq y \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$.

3. Dans le point 5., on aurait pu déduire la seconde équivalence par négation de la première (en traitant à part le cas où $|x| = y$).

Corollaire V.5. Si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b > 0$, l'ensemble des réels x tels que $|x - a| \leq b$ est le segment $[a - b; a + b]$.

Définition V.6. Si $x, y \in \mathbb{R}$, la quantité $|x - y|$ est appelée **distance** entre x et y .

Remarque V.7. L'intervalle $[a - b; a + b]$ correspond à l'ensemble des réels à distance au plus b de a .

Théorème V.8 (Inégalité triangulaire). Si $x, y \in \mathbb{R}$, alors :

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
2. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

De plus, il y a égalité dans les deux cas si, et seulement si, x et y sont de même signe.

Démonstration. 1. On utilise que $-|x| \leq x \leq |x|$ et $-|y| \leq y \leq |y|$.

Donc : $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$.

D'où : $|x + y| \leq |x| + |y|$.

2. On utilise l'inégalité précédente :

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$$

donc $|x| - |y| \leq |x - y|$.

En échangeant les rôles de x et y , on trouve : $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$.

Donc : $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$.

Et ainsi : $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Pour les égalités, on a :

$$|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow (x + y)^2 = (|x| + |y|)^2 \Leftrightarrow xy = |x| \times |y| = |xy| \Leftrightarrow xy \geq 0.$$

$$||x| - |y|| = |x - y| \Leftrightarrow (|x| - |y|)^2 \leq (x - y)^2 \Leftrightarrow |xy| = xy \Leftrightarrow xy \geq 0$$

Dans un cas comme dans l'autre, on a égalité si, et seulement si, $xy \geq 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, x et y sont de même signe. $\square$

Remarque V.9. Comme $|y| = |-y|$, on a plus synthétiquement :

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

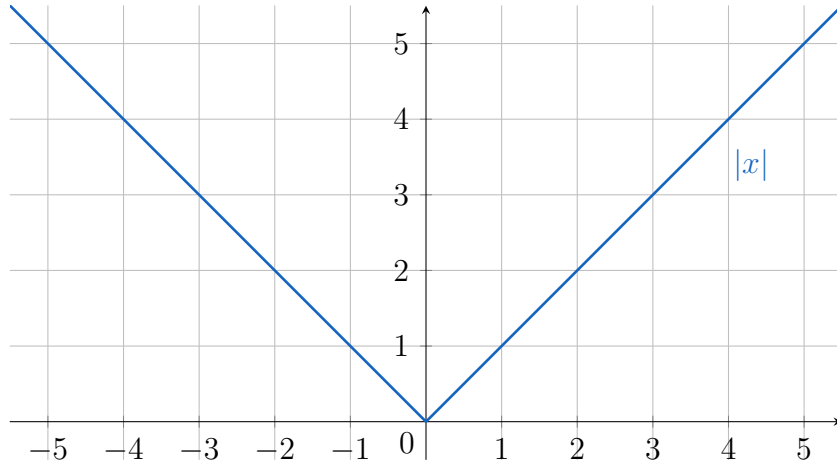
Corollaire V.10. Si $x_1, \dots, x_n$ sont des réels, alors :

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| = |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{k=1}^n |x_k|$$

avec égalité si, et seulement si, tous les x_i sont de même signe.

Démonstration. Par récurrence. □

Proposition V.11. La fonction $x \mapsto |x|$ a pour courbe représentative :



VI La partie entière

Théorème-Définition VI.1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle sa **partie entière** le plus grand entier inférieur ou égal à x , et on la notera $\lfloor x \rfloor$.

C'est l'unique $n \in \mathbb{Z}$ qui vérifie $n \leq x < n + 1$.

Démonstration. — Elle vérifie cette inégalité : par définition, on a directement $\lfloor x \rfloor \leq x$. Mais c'est le plus grand entier qui vérifie cette inégalité : ainsi $\lfloor x \rfloor + 1$ est un entier qui ne vérifie pas cette inégalité, donc $x < \lfloor x \rfloor + 1$.

— C'est le seul tel entier : considérons $n, m \in \mathbb{Z}$ qui vérifient cette inégalité. Alors en croisant les inégalités on a :

$$n \leq x < m + 1 \text{ et } m \leq x < n + 1$$

donc $n < m + 1$ et $m < n + 1$. Comme ce sont des entiers, on a ainsi : $n \leq m$ et $m \leq n$ donc $n = m$. D'où l'unicité. □

Proposition VI.2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors $n = \lfloor x \rfloor$ si, et seulement si : $x - 1 < n \leq x$.

Démonstration. On applique directement la définition. Avec les mêmes notations, on a :

$$n = \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow n \leq x < n + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq x \\ x < n + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq x \\ x - 1 < n \end{cases} \Leftrightarrow x - 1 < n \leq x.$$

□

Remarques VI.3.

1. La partie entière se lit bien sur les décimales **pour les nombres positifs** : $\lfloor 1,32 \rfloor = 1$ mais $\lfloor -1,32 \rfloor = -2$.
2. Pour manipuler ou faire apparaître des parties entières, on utilisera systématiquement l'une ou l'autre des inégalités précédentes.

Exemple VI.4. Si $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$, alors : $\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 = n^2 + 2 + \frac{1}{n^2}$.

Donc : $n^2 + 2 \leq \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 < n^2 + 3$.

Et ainsi : $\left\lfloor \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 \right\rfloor = n^2 + 2$.

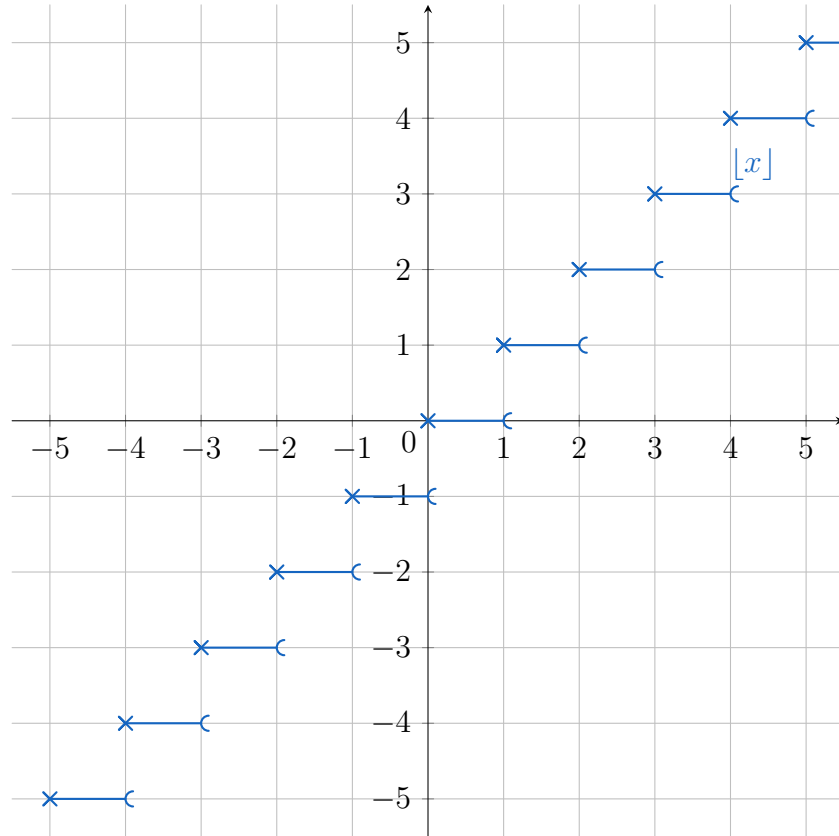
Proposition VI.5. Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors : $\lfloor x + n \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$.

Démonstration. Par définition de $\lfloor x \rfloor$, on a : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Donc, en rajoutant n : $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$.

Et, comme $\lfloor x \rfloor + n$ est un entier, on a bien le résultat voulu. $\square$

Proposition VI.6. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ a pour courbe représentative :



VII Équations et inéquations de degré 2 ou moins

Proposition VII.1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Alors l'équation $ax + b = 0$ admet pour unique solution le réel $-\frac{b}{a}$.

Remarque VII.2. Si $a = 0$, l'équation $ax + b = 0$ se réécrit $b = 0$, et donc :

- n'admet aucune solution si $b \neq 0$;
- admet tout réel pour solution si $b = 0$.

Proposition VII.3. Avec les mêmes notations, l'inéquation $ax + b > 0$ admet pour ensemble solution :

- l'intervalle $] -b/a; +\infty[$ si $a > 0$;
- l'intervalle $] -\infty; -b/a[$ si $a < 0$.

Démonstration. Par manipulation d'égalité ou d'inégalité, en raisonnant par équivalence. $\square$

Remarque VII.4. Pour éviter les erreurs de signes, on peut regarder ce qui se passe en l'infini dans les inégalités, pour être sûr de ne pas s'être trompé.

Proposition VII.5. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$:

- admet pour solutions réelles : $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta \geq 0$;

— n'admet pas de solution réelle si $\Delta < 0$.

Démonstration. Avec les mêmes notations, on a :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2} \right)$$

et on a ainsi :

— si $\Delta \geq 0$: on a les équivalences :

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right) = a \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

et on conclut par règle du produit nul ;

— si $\Delta < 0$: alors pour tout réel x :

$$ax^2 + bx + c = a \underbrace{\left(\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2}_{\geq 0} - \underbrace{\frac{\Delta}{(2a)^2}}_{> 0} \right)}_{> 0 \text{ donc } \neq 0} \neq 0$$

donc l'équation n'a pas de solution réelle.

□

Remarque VII.6. Si $\Delta = 0$, il n'y a qu'une seule solution, et on parle de solution double.

Corollaire VII.7. Avec les mêmes notations, si $\Delta \geq 0$ et que l'on note x_1, x_2 les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ avec $x_1 \leq x_2$, alors :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Proposition VII.8. Avec les mêmes notations, la quantité $ax^2 + bx + c$ est :

- du signe de a sur $] -\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$, du signe de $-a$ sur $]x_1, x_2[$ si $\Delta \geq 0$, et nulle seulement en x_1 et x_2 ;
- du signe de a sur $\mathbb{R}$ si $\Delta < 0$.

	$a < 0$	$a > 0$
	$\begin{array}{ccccccc} -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ccccccc} -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline \end{array}$
$\Delta \geq 0$		
$\Delta < 0$	$\begin{array}{ccc} -\infty & & +\infty \\ \hline & - & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ccc} -\infty & & +\infty \\ \hline & + & \\ \hline \end{array}$

Démonstration. Découle de l'écriture précédente. □

Remarque VII.9. Là encore on peut regarder ce qui se passe en l'infini dans les inégalités, pour être sûr de ne pas s'être trompé de signe.

VIII Techniques de résolutions d'équations et d'inéquations

Exemple VIII.1. Résolution de l'équation $x = \sqrt{x+1}$.

À cause de la racine, on cherche les solution dans $[-1; +\infty[$. Mais, comme on doit avoir $x = \sqrt{x+1}$, alors x aussi doit être positif. On cherche donc les solutions dans $[0; +\infty[= \mathbb{R}_+$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a l'équivalence :

$$x = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2 = x+1$$

où la première équivalence est directement la définition de la racine carrée de $x+1$ (l'unique réel positif dont le carré vaut $x+1$). On souhaite donc résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

On a une équation du second degré de discriminant $\Delta = 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 = 5$. Donc les racines sont

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

On a bien que $x_1 \geq 0$, mais $x_2 < 0$ n'est pas solution : donc l'équation admet pour unique solution

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Exemple VIII.2. Résolution de l'équation $2x^2 + 2xy - 2x + y^2 + 1 = 0$.

On a : $y^2 + 2xy + x^2 = (y+x)^2$ et $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

Donc l'équation est équivalente à : $(y+x)^2 + (x-1)^2 = 0$.

Comme un carré (de réel) est positif, on a donc :

$$(y+x)^2 + (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (y+x)^2 = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -x = -1 \end{cases}$$

donc l'unique solution est $(x, y) = (1, -1)$.

Exemple VIII.3. Résolution de l'inéquation $\sqrt{x-1} \leq \sqrt{3x^2-4}$.

On a l'équivalence :

$$\sqrt{x-1} \leq \sqrt{3x^2-4} \Leftrightarrow 0 \leq x-1 \leq 3x^2-4$$

On traite séparément les deux inéquations :

- $0 \leq x-1 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1; +\infty[= S_1$;
- $x-1 \leq 3x^2-4 \Leftrightarrow 0 \leq 3x^2-x-3$: on reconnaît un trinôme du second degré, de coefficient dominant positif, qui est donc positif à l'extérieur de ses racines.

Ses racines sont $x_1 = \frac{1+\sqrt{37}}{6}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{37}}{6}$. Donc la deuxième inéquation a pour ensemble solution $S_2 =]-\infty; \frac{1-\sqrt{37}}{6}] \cup [\frac{1+\sqrt{37}}{6}; +\infty[$.

Comme $\frac{1-\sqrt{37}}{6} < 1$ et que $\frac{1+\sqrt{37}}{6} > 1$, on déduit que l'équation admet pour ensemble solution :

$$S_1 \cap S_2 = \left[\frac{1+\sqrt{37}}{6}; +\infty[\right].$$

Exemple VIII.4. Résolution de l'inéquation $|x-1| \leq |2x-3|$.

Par propriétés des valeurs absolues, on a les équivalences :

$$|x-1| \leq |2x-3| \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq (2x-3)^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x-2)(3x-4) \Leftrightarrow 0 \leq 3(x-2)(x-4/3) \Leftrightarrow x \in]-\infty; \frac{4}{3}] \cup [2; +\infty[.$$

où, pour la dernière équivalence, on reconnaît à nouveau un trinôme du second degré, de coefficient dominant positif, dont les racines sont $\frac{4}{3}$ et 2.

Et donc l'ensemble solution est : $] -\infty; \frac{4}{3}] \cup [2; +\infty[$.

Autre méthode : on peut procéder par disjonction de cas pour éliminer les valeurs absolues. On trouve alors les solutions selon les valeurs de x :

x	$] -\infty, 1]$	$[1, \frac{3}{2}]$	$[\frac{3}{2}, +\infty[$
$ x-1 $	$1-x$	$x-1$	$x-1$
$ 2x-3 $	$3-2x$	$3-2x$	$2x-3$
$ x-1 \leq 2x-3 $	$1-x \leq 3-2x$ $\Leftrightarrow x \leq 2$	$x-1 \leq 3-2x$ $\Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$	$x-1 \leq 2x-3$ $\Leftrightarrow x \geq 2$
S	$S_1 =]-\infty, 1]$	$S_2 = [1, \frac{4}{3}]$	$S_3 = [2, +\infty[$

Et on trouve finalement que : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 =]-\infty; \frac{4}{3}] \cup [2; +\infty[$.

Exemple VIII.5. Résolution de l'équation $[\frac{x^2}{3} - 2x + \frac{5}{3}] = -1$.

L'équation est équivalente à l'inéquation :

$$-1 \leq \frac{x^2}{3} - 2x + \frac{5}{3} < 0$$

dont on résout séparément les deux parties :

— on procède par équivalences :

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{x^2}{3} - 2x + \frac{5}{3} &\Leftrightarrow -3 \leq x^2 - 6x + 5 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 6x + 8 \end{aligned}$$

On a donc un trinôme du second degré, de coefficient dominant positif, de discriminant $\Delta = 4 = 2^2$, dont les racines sont : $\frac{6-2}{2} = 2$ et $\frac{6+2}{2} = 4$. Donc finalement la première inégalité est vérifiée pour $x \in]-\infty; 2] \cup [4; +\infty[$.

— on raisonne de la même manière :

$$\frac{x^2}{3} - 2x + \frac{5}{3} < 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 < 0$$

On a encore un trinôme du second degré, de coefficient dominant positif, de discriminant $\Delta = 16 = 4^2$, dont les racines sont : $\frac{6-4}{2} = 1$ et $\frac{6+4}{2} = 5$. Donc finalement la seconde inégalité est vérifiée pour $x \in]1; 5[$.

Donc l'ensemble solution de l'équation est :

$$([-\infty; 2] \cup [4; +\infty[) \cap]1; 5[=]1; 2] \cup [4; 5[.$$

Chapitre 3

Rappels et compléments sur les fonctions numériques

I Généralités sur les fonctions

I.1 Domaine de définition

Définition I.1. Si $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, **fonction numérique f définie sur $\mathcal{D}$** est la donnée pour tout élément $x \in \mathcal{D}$ d'un unique réel noté $f(x)$.

L'ensemble $\mathcal{D}$ est appelé **domaine de définition**.

On notera alors : $f : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$.

Remarque I.2. En général, une fonction sera donnée par une formule : auquel cas, son domaine de définition est là où la formule a bien un sens.

Exemple I.3. Considérons la fonction définie par $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Alors la formule $f(x)$ n'a de sens que lorsque $4 - x^2 \geq 0$, c'est-à-dire que $\mathcal{D}_f = [-2; 2]$.

Définition I.4. Si f est une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et $A \subset \mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathcal{D}$, on définit la **restriction de f à A** comme la fonction notée $f|_A$ définie sur A qui coïncide avec f :

$$f|_A : \begin{cases} A & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}.$$

Inversement, on dit que f est un **prolongement** de $f|_A$.

Exemple I.5. La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2}$ est la restriction de la fonction $x \mapsto x$ à $\mathbb{R}_+$.

Définition I.6. Si f est une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et A est une partie de $\mathbb{R}$, on dit que f est **à valeurs dans A** si : pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \in A$.

On notera alors $f : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow & A \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ au lieu de $f : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$.

Exemple I.7. La fonction $\sin$ est à valeurs dans $[-1; 1]$. Sa restriction à $[0; \pi]$ est à valeurs dans $[0; 1]$.

Définition I.8. Soient f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans A , et g une fonction définie sur A . On dit alors que g et f sont **composables**, et on définit la **composée de g et f** comme la fonction notée $g \circ f$, définie sur $\mathcal{D}$ par :

$$g \circ f : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{cases}.$$

Exemple I.9. La fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ est à valeurs dans $[1; +\infty[$. Donc elle est composable avec la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x-1}$. Et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g \circ f(x) = \sqrt{(x^2 + 1) - 1} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Comme f est définie sur $\mathbb{R}$, on peut également composer dans l'autre sens : la fonction $f \circ g$ est définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$\forall x \in [1; +\infty[, f \circ g(x) = \sqrt{x-1}^2 + 1 = (x-1) + 1 = x.$$

Proposition I.10. Si f, g sont deux fonctions définies sur un même ensemble $\mathcal{D}$, alors on peut définir les fonctions :

1. **somme** de f et g , notée $f + g$, définie par : $f + g : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) + g(x) \end{cases}$;
2. **produit** de f et g , notée fg , définie par : $fg : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) \times g(x) \end{cases}$.

On définit de même, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf .

Si g ne prend jamais de valeur nulle, on définit le **quotient** de f et g , notée $\frac{f}{g}$, par : $\frac{f}{g} : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$.

Remarque I.11. Dire que g ne s'annule pas (sur D) veut dire que :

$$\forall x \in D, g(x) \neq 0$$

ce qu'il ne faut pas confondre avec l'assertion $g \neq 0$, qu'on lirait “ g n'est pas la fonction nulle”, et qui veut dire que :

$$\exists x \in D, g(x) \neq 0.$$

I.2 Graphes, images et antécédents

Définition I.12. Si f est une fonction définie sur $\mathcal{D}$, et $x \in \mathcal{D}$, $y \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = y$. On dit que :

1. y est **l'image** de x ;
2. x est **un antécédent** de y .

Remarque I.13. Une image est unique, tandis qu'un réel peut avoir aucun, un, plusieurs ou une infinité d'antécédents.

Exemple I.14. On considère la fonction $\cos$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors :

1. l'image de $\frac{\pi}{2}$ est 0 ;
2. les antécédents de 0 sont les $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$;
3. tout y tel que $|y| > 1$ n'a pas d'antécédent.

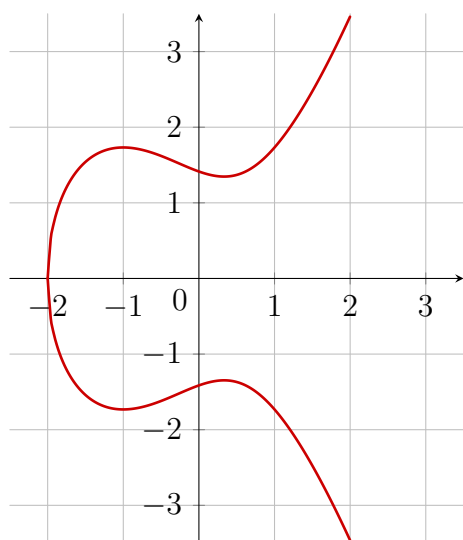
Définition I.15. Si f est une fonction définie sur $\mathcal{D}$, son **graphe**, ou sa **représentation graphique**, est l'ensemble $\mathcal{C}_f$ défini par :

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}\}.$$

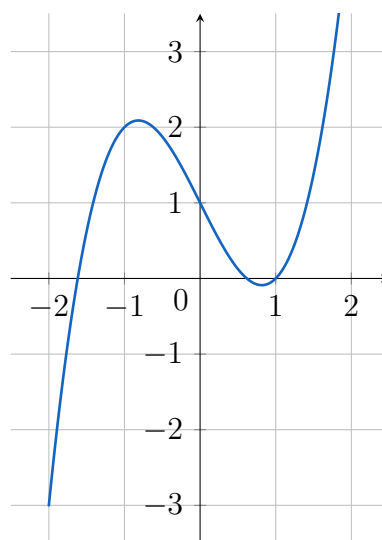
Remarque I.16. Autrement dit, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow x \in \mathcal{D} \text{ et } y = f(x)$$

donc, à abscisse donnée, il y a au plus un point sur le graphe.



Pas un graphe.



Un graphe.

I.3 Fonctions bornées

Définition I.17. On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) \leq M$$

et on dit alors que M est un **majorant** de f .

On dit qu'elle est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f(x) \geq m$$

et on dit alors que m est un **minorant** de f .

On dit enfin que f est bornée si elle est majorée et minorée.

Remarques I.18.

1. Graphiquement, cela se voit : la courbe de f est limitée en ordonnée (vers le haut, vers le bas ou les deux).
2. On écrira toujours "majorée par ..." ou "minorée par ..." en donnant un majorant/minorant **explicite**.
3. S'il existe, un majorant (ou un minorant) n'est jamais unique.

Définition I.19. On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ possède un **maximum** (resp. **minimum**) en $x \in \mathcal{D}$ si $f(x)$ est un majorant (resp. un minorant) de f .

On dit plus généralement que f a un **extremum** en x si elle atteint son maximum ou son minimum en x .

Exemples I.20.

1. la fonction $x \mapsto x^2$ est minorée (elle admet même 0 pour minimum), mais n'est pas majorée ;
2. la fonction $x \mapsto e^x$ est minorée (par 0), mais non majorée ; et elle n'admet pas de minimum ;
3. la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est bornée ; elle admet 1 comme maximum et -1 comme minimum, qui sont respectivement atteints en tous les $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition-Définition I.21. Si $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, son maximum, s'il existe, est unique. On l'appellera donc **le** maximum de f .

Il en est de même pour le minimum.

Démonstration. Supposons que f possède un maximum atteint en a et en b , pour $a, b \in \mathcal{D}$. Alors :

- comme f atteint son maximum en $a : \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \leq f(a)$. En particulier, pour $x = b$, on trouve : $f(b) \leq f(a)$.
- comme f atteint son maximum en $b : \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \leq f(b)$. En particulier, pour $x = a$, on trouve : $f(a) \leq f(b)$.

Et ainsi : $f(a) = f(b)$, ce qui assure l'unicité (sous réserve d'existence).

L'unicité du minimum se montre de même. □

Remarque I.22. Il se peut en revanche que le maximum ou le minimum soit atteint en différents éléments de $\mathcal{D}$. Par exemple, la fonction $\sin$ atteint son maximum (à savoir 1) en tous les $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Proposition I.23. La fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée si, et seulement si, la fonction $|f| : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto |f(x)| \end{cases}$ est majorée.

Démonstration.

- si $|f|$ est majorée par M : alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|f(x)| \leq M$, et donc : $-M \leq f(x) \leq M$, donc f est bornée (minorée par $-M$ et majorée par M);
 - réciproquement : si f est minorée par m et majorée par M , alors : $\forall x \in \mathcal{D}, m \leq f(x) \leq M$. Et donc : $\begin{cases} f(x) & \leq M \\ -f(x) & \leq -m \end{cases}$ donc $|f|$ est majorée par $\max(M, -m)$.
-

I.4 Monotonie

Définition I.24 (Fonction monotone). Si f est définie sur $\mathcal{D}$, on dit que f est :

1. **croissante** si pour tous $x, y \in \mathcal{D} : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
2. **strictement croissante** si pour tous $x, y \in \mathcal{D} : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
3. **décroissante** si pour tous $x, y \in \mathcal{D} : x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
4. **strictement décroissante** si pour tous $x, y \in \mathcal{D} : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$;
5. **monotone** si elle est croissante ou décroissante ;
6. **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque I.25. Pour appliquer une fonction à une inégalité, on a besoin de connaître sa monotonie. La stricte monotonie est même nécessaire si on veut manipuler des inégalités strictes, ou si on veut raisonner avec des équivalences.

Exemples I.26.

1. La fonction $\exp$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$: elle n'est en revanche pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car :

$$-1 \leq 1 \text{ et } \frac{1}{-1} = -1 < 1 = \frac{1}{1}.$$

3. La fonction $x \mapsto x^2$ est :
 - strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ car :

$$x < y \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -y < -x \Rightarrow 0 \leq y^2 < x^2$$

- strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ car :

$$0 \leq x < y \Rightarrow 0 \leq x^2 < y^2$$

où dans chaque cas on a multiplié par elle-même une inégalité dont tous les termes étaient positifs (ce qui est parfaitement licite).

Proposition I.27. Si f a pour graphe $\mathcal{C}_f$, alors :

1. f est croissante si, et seulement si, $\mathcal{C}_f$ “monte” quand on va vers la droite ;
2. f est décroissante si, et seulement si, $\mathcal{C}_f$ “descend” quand on va vers la droite.

Remarque I.28. La monotonie se comporte assez mal avec la somme, mais très mal avec les produits (comme les inégalités en général).

Proposition I.29. Si f et g sont deux fonctions composables monotones, alors $g \circ f$ est aussi monotone, et elle est :

1. croissante si f et g ont même monotonie ;
2. décroissante sinon.

De plus, si f et g sont strictement monotones, alors $g \circ f$ aussi.

Remarque I.30. Dans le cas de stricte monotonie, on a bien besoin de la stricte monotonie de f et de g . Par exemple, si f ou g est constante, alors $f \circ g$ est constante donc ne peut pas être strictement monotone.

Démonstration.

Soient $x, y \in \mathcal{D}$ avec $x \leq y$:

- si f est croissante : alors : $f(x) \leq f(y)$ et donc :
 - si g est croissante : $g(f(x)) \leq g(f(y))$;
 - si g est décroissante : $g(f(x)) \geq g(f(y))$;
- si f est décroissante : alors : $f(x) \geq f(y)$ et donc :
 - si g est croissante : $g(f(x)) \geq g(f(y))$;
 - si g est décroissante : $g(f(x)) \leq g(f(y))$;

Ce qui montre bien les cas de monotonie.

La stricte monotonie de montre de la même manière, en considérant partout des inégalités strictes. □

I.5 Bijections

Définition I.31. Si I et J sont deux parties de $\mathbb{R}$, on dit qu’une fonction $f : I \rightarrow J$ réalise **une bijection de I sur J** si tout élément de J admet **un unique antécédent** par f dans I .

On note alors f^{-1} la fonction définie sur J qui à tout $y \in J$ associe son unique antécédent par f .

La fonction f^{-1} est appelée **bijection réciproque** de f .

Exemple I.32.

1. La fonction $x \mapsto e^x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$: sa réciproque est la fonction :

$$\ln : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{cases} .$$

2. La fonction $\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$ est bijective, et sa bijection réciproque est la fonction racine carrée.

La fonction $x \mapsto x^2$ réalise aussi une bijection de $\mathbb{R}_-$ sur $\mathbb{R}_+$, mais alors sa bijection réciproque est $x \mapsto -\sqrt{x}$.

Remarque I.33. Pour $f : I \rightarrow J$ bijective, on a :

$$\forall x \in I, \forall y \in J, f(x) = y \Leftrightarrow y = f^{-1}(x)$$

et étudier la bijectivité de f revient à étudier l’équation $f(x) = y$, et étudier son nombre de solution :

- on restreint l'ensemble d'arrivée (les y) pour que tout élément y ait au moins une solution ;
- puis on restreint l'ensemble de départ (les x) pour que tout y ait au plus une solution.

Exemple I.34. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x+1}{x-2} \end{cases}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminons les antécédents de y :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-2} \\ &\Leftrightarrow (x-2)y = x+1 \\ &\Leftrightarrow x(y-1) = 2y+1 \end{aligned}$$

et donc :

- si $y = 1$: y n'a pas d'antécédent ;
- si $y \neq 1$: y a pour unique antécédent $x = \frac{2y+1}{y-1}$.

Donc f n'est pas bijective de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ sur $\mathbb{R}$. Mais elle l'est de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et sa bijection réciproque est :

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ y & \mapsto \frac{2y+1}{y-1} \end{cases}$$

Définition I.35. Si I est une partie de $\mathbb{R}$, on définit la **fonction identité sur I** , notée id_I , comme la fonction définie sur I par : $\forall x \in I, \text{id}_I(x) = x$.

Proposition I.36. Si $f : I \rightarrow J$ est bijective, alors :

1. $f \circ f^{-1} = \text{id}_J$;
2. $f^{-1} \circ f = \text{id}_I$;
3. f^{-1} réalise une bijection de J sur I , avec $(f^{-1})^{-1} = f$.

Démonstration.

1. Si $y \in J$, comme $f^{-1}(y)$ est un antécédent de y par f (c'est même le seul), alors $f(f^{-1})(y) = y$;
2. Si $x \in I$, alors $f(x)$ est l'image de x par f , donc x est l'unique antécédent de $f(x)$; mais $f^{-1}(f(x))$ aussi, donc $x = f^{-1}(f(x))$;
3. Soit $x \in I$. Procédons par analyse-synthèse pour déterminer les antécédents de x par f^{-1} dans J :
 - analyse : soit $y \in J$ un antécédent de x par f^{-1} . Alors $f^{-1}(y) = x$. Et en composant par f , par le point 1., il vient : $f(x) = f \circ f^{-1}(y) = y$, ce qui assure l'unicité d'un antécédent.
 - synthèse : par le point 2. : $f^{-1}(f(x)) = x$, donc $f(x)$ est bien un antécédent de x , ce qui assure l'existence.

Donc tout élément de I admet un unique antécédent par f^{-1} dans J , et cet élément est $f(x)$, ce qui montre bien que f^{-1} est bijective, de bijection réciproque f .

□

Proposition I.37. Si f est strictement monotone sur I , alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$.

De plus, sa réciproque f^{-1} a même monotonie que f .

Démonstration. Supposons par exemple que f est strictement croissante.

Soit $y \in J$: alors il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$ par définition de J , donc y a un antécédent.

Soient x_1, x_2 sont deux antécédents de y . Quitte à échanger x_1 et x_2 , on peut supposer que $x_1 \leq x_2$. Si $x_1 < x_2$, alors $y = f(x_1) < f(x_2) = y$ par monotonie, ce qui est impossible. Donc $x_1 = x_2$

Donc y a un unique antécédent, et f est bijective.

Soient $y_1, y_2 \in J$ tels que $y_1 < y_2$. Notons $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ pour $x_1, x_2 \in I$. Nécessairement on a : $x_1 < x_2$ (car $x_1 \geq x_2$ impliquerait que $y_1 \geq y_2$). Mais $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$.

Donc f^{-1} est strictement croissante.

Le cas où f est strictement décroissante se montre de la même manière.

□

Remarque I.38. Une bijection n'est pas nécessairement monotone. En revanche :

- si elle est monotone, elle l'est strictement.
- de manière plus subtile, si elle est continue et définie sur un intervalle, elle est strictement monotone.

II Fonctions affines

Définition II.1. Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par une relation du type :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont respectivement la **pente** et l'**ordonnée à l'origine** de la fonction f .

Remarques II.2.

1. Les fonctions constantes sont des fonctions affines : ce sont exactement celles de pente nulle.
2. Une fonction affine est dite **linéaire** si son ordonnée à l'origine est nulle.

Proposition II.3. Les fonctions affines sont exactement les fonctions dont les graphes sont des droites. Réciproquement, toute droite non verticale du plan est le graphe d'une (unique) fonction affine. De plus, la fonction considérée est linéaire si, et seulement si, la droite associée passe par l'origine.

Démonstration. Si f est une fonction affine, notons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto ax + b$. Alors le graphe de f est l'ensemble :

$$\mathcal{C}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax - y = b\}$$

qui est bien l'équation d'une droite (non verticale comme le coefficient devant y est non nul).

Réciproquement, considérons une droite D non verticale, et notons $\alpha x + \beta y = \gamma$ une équation de D . Comme cette droite est non verticale, alors nécessairement $\beta \neq 0$. Et donc :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha x + \beta y = \gamma\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta}\}$$

qui est donc le graphe de la fonction affine : $f : x \mapsto -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta}$.

Enfin, avec les mêmes notations on a :

$$(0, 0) \in D \Leftrightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow a \cdot 0 + b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

ce qui donne bien l'équivalence voulue. □

Proposition II.4. Étant donnés deux points $M(x_1, y_1)$ et $N(x_2, y_2)$ distincts et non verticalement alignés, la droite (MN) est le graphe de la fonction affine $x \mapsto ax + b$ avec :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ et } b = y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

Démonstration. Avec les notations précédentes, on a le système suivant :

$$\begin{cases} y_1 &= ax_1 + b \\ y_2 &= ax_2 + b \end{cases}$$

d'inconnues a et b :

- en soustrayant les deux équations : on obtient $y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2)$, ce qui donne la bonne valeur de a ; le fait que M, N ne soient pas verticalement alignés assure au passage que $x_1 \neq x_2$, et donc $x_1 - x_2 \neq 0$;

— en réinjectant la valeur de a , on déduit b .

□

Remarque II.5. La droite (MN) étant aussi la droite (NM) , il est rassurant de voir que a et b ne changent pas quand on inverse les indices dans les expressions précédentes.

Proposition II.6. Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine. Alors :

- si $a = 0$: f est constante ;
- si $a > 0$: f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
- si $a < 0$: f réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

De plus, dans les deux derniers cas, la bijection réciproque de f est :

$$f^{-1} : x \mapsto \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}.$$

Démonstration. Le cas $a = 0$ est immédiat.

Traitons le cas $a > 0$ pour la monotonie. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{a>0} ax_1 < ax_2 \Rightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ce qui assure bien que f est strictement croissante.

Le cas $a < 0$ se traite de même.

Pour la bijection réciproque, considérons $x, y \in \mathbb{R}$ et supposons que $a \neq 0$. Alors :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = ax + b \Leftrightarrow y - b = ax \xRightarrow{a \neq 0} x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}.$$

Ce qui assure bien la bijectivité de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec la bonne bijection réciproque.

□

Remarque II.7. On note au passage que la réciproque d'une fonction affine (de pente $a \neq 0$) est aussi une fonction affine (de pente $\frac{1}{a}$). Plus généralement, on peut voir que : la composée, la somme, la différence ou la multiplication par une constante de fonctions affines sont aussi des fonctions affines.

III Tracé d'une fonction

III.1 Symétries

Proposition III.1. Soient f une fonction définie sur $\mathcal{D}$, de graphe $\mathcal{C}_f$ dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et $a \in \mathbb{R}$. Alors :

1. le graphe de $x \mapsto f(x) + a$ est le translaté de $\mathcal{C}_f$ par le vecteur $a\vec{j}$;
2. le graphe de $x \mapsto f(x + a)$ est le translaté de $\mathcal{C}_f$ par le vecteur $-a\vec{i}$;
3. le graphe de $x \mapsto af(x)$ est le dilaté de $\mathcal{C}_f$ par l'affinité orthogonale $(x, y) \mapsto (x, ay)$;
4. si $a \neq 0$, le graphe de $x \mapsto f(ax)$ est le dilaté de $\mathcal{C}_f$ par l'affinité orthogonale $(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{a}, y\right)$.

Démonstration.

1. On note $g : x \mapsto f(x) + a$. Alors, si $x \in \mathcal{D}$, on a :

$$(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y + a = f(x) + a \Leftrightarrow y + a = g(x) \Leftrightarrow (x, y + a) \in \mathcal{C}_g$$

2. On note $g : x \mapsto f(x + a)$. Alors, si $x \in \mathcal{D}$, on a :

$$(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = f((x - a) + a) \Leftrightarrow y = g(x - a) \Leftrightarrow (x - a, y) \in \mathcal{C}_g$$

3. On note $g : x \mapsto af(x)$. Alors, si $x \in \mathcal{D}$, on a :

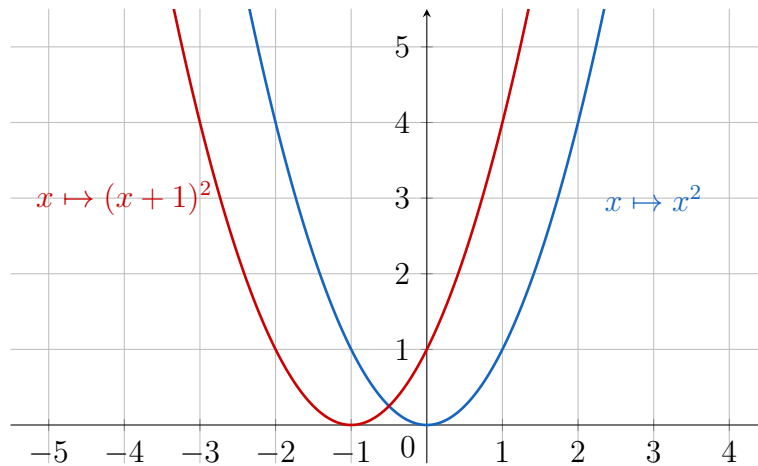
$$(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{g(x)}{a} \Leftrightarrow ay = g(x) \Leftrightarrow (x, ay) \in \mathcal{C}_g.$$

4. On note $g : x \mapsto f(ax)$. Alors, si $x \in \mathcal{D}$, on a :

$$(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = g\left(\frac{x}{a}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}, y\right) \in \mathcal{C}_g.$$

□

Remarque III.2. Il faut bien faire attention au signe “−” et au fait qu’il faut diviser par a dans les cas 2 et 4. Par exemple, pour le cas 2, on représente ci-dessous la fonction $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto (x+1)^2$: la deuxième est bien l’image de la première par la translation de vecteur $-\vec{i}$.



Définition III.3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est :

1. **paire** si : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$;
2. **impaire** si : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$;
3. **périodique** s’il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$. Et on dit alors que f est T -périodique, ou que T est une période de f .

Remarques III.4.

1. On peut étendre les définitions à des fonctions définies sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$: il faudra faire attention que $-x \in \mathcal{D}$ ou que $x+T \in \mathcal{D}$.
2. Une fonction T -périodique est aussi (kT) -périodique pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Et il sera plus intéressant de chercher un T aussi petit que possible.
3. Si f est impaire, alors $f(0) = 0$.

Proposition III.5. Si f a pour graphe $\mathcal{C}_f$:

1. f est paire si, et seulement si, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l’axe des ordonnées ;
2. f est impaire si, et seulement si, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l’origine du plan ;
3. f est T -périodique si, et seulement si, $\mathcal{C}_f$ est invariant par translation de vecteur $T\vec{i}$.

Proposition III.6. Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s’écrit de manière unique comme somme d’une fonction paire g et d’une fonction impaire h .

Plus précisément, g et h sont définies par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Démonstration. Voir chapitre 1. □

Proposition III.7. Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de graphe $\mathcal{C}_f$, et $a, b \in \mathbb{R}$:

1. si pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(a - x) = f(x)$, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \frac{a}{2}$;
2. si pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(a - x) = b - f(x)$, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport au point $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$.

Démonstration. 1. On considère $g : x \mapsto f(a - x)$. Alors :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{C}_f &\Leftrightarrow y = f(x) \\ &\Leftrightarrow y = f(a - (a - x)) \\ &\Leftrightarrow y = g(a - x) \\ &\Leftrightarrow (a - x, y) \in \mathcal{C}_g \end{aligned}$$

Et donc $\mathcal{C}_g$ est l'image par $\mathcal{C}_f$ de l'application $(x, y) \mapsto (a - x, y)$, qui n'est autre que la symétrie axiale considérée.

Le résultat se déduit du cas où $f = g$.

2. On considère $g : x \mapsto b - f(a - x)$. Alors :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{C}_f &\Leftrightarrow y = f(x) \\ &\Leftrightarrow y = f(a - (a - x)) \\ &\Leftrightarrow b - y = b - f(a - (a - x)) \\ &\Leftrightarrow b - y = g(a - x) \\ &\Leftrightarrow (a - x, b - y) \in \mathcal{C}_g \end{aligned}$$

Et donc $\mathcal{C}_g$ est l'image par $\mathcal{C}_f$ de l'application $(x, y) \mapsto (a - x, b - y)$, qui n'est autre que la symétrie centrale considérée.

Le résultat se déduit du cas où $f = g$. □

Proposition III.8. Si f est bijective, alors le graphe de f^{-1} est l'image du graphe de f par la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Démonstration. Découle des équivalences : $(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow (y, x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$. □

Remarque III.9. Les symétries permettent de réduire l'ensemble d'étude de f (c'est-à-dire l'ensemble sur lequel on va étudier f pour pouvoir la connaître entièrement) :

- si f a une symétrie (axiale ou centrale), on peut “couper en deux” l'ensemble de définition ;
- si f est T -périodique : on peut restreindre l'ensemble sur un intervalle (quelconque) de longueur T .

Exemple III.10. Commençons l'étude de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)\sin(x)^3$. Alors f vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $f(2\pi + x) = \cos(2\pi + x)\sin(2\pi + x)^3 = \cos(x)\sin(x)^3 = f(x)$, donc f est 2π -périodique ;
- $f(-x) = \cos(-x)\sin(-x)^3 = -\cos(x)\sin(x)^3 = -f(x)$, donc f est impaire ;
- $f(\pi - x) = \cos(\pi - x)\sin(\pi - x)^3 = -\cos(x)\sin(x)^3 = -f(x)$, donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport au point $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Donc on peut se contenter d'étudier f sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$. On remonte alors à $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$ entier en faisant une symétrie centre par rapport à $(\frac{\pi}{2}, 0)$, puis une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis des translations de $\pm 2\pi \vec{i}$.

On pouvait aussi remarquer que f est π -périodique, mais cela ne rajoute rien aux symétries précédentes.

III.2 Asymptotes

Définition III.11. Soit f définie sur un intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (resp. $] -\infty; A[$).

On dit que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est **asymptote** à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$).

On parle d'**asymptote horizontale** lorsque $a = 0$, et d'**asymptote oblique** sinon.

On dit que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = A$ est **asymptote** à $\mathcal{C}_f$ si $\lim_{x \rightarrow A^+} f(x) = \pm\infty$ (resp. $\lim_{x \rightarrow A^-} f(x) = \pm\infty$).

On parle alors d'**asymptote verticale**.

Proposition III.12. La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b \end{cases}$$

et pareil en $-\infty$.

Démonstration. Supposons que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote. Alors, sous réserve que les limites ci-dessous existent bien :

— comme $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - (ax + b)}{x} + \frac{ax + b}{x}$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x) - ax - b}{x} + \frac{ax + b}{x} \right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - ax - b}{x}}_{=0} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a + \frac{b}{x} \right)}_{=a} = a$$

où l'existence de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ est assurée par les deux dernières limites ;

— comme $(f(x) - ax) = (f(x) - (ax + b)) + b$, alors de même :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b) + b) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b))}_{=0} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} (b)}_{=b} = b$$

où l'existence de $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ est assurée par les deux dernières limites ;

ce qui donne la première implication.

Pour la réciproque, il suffit de considérer la seconde limite. On a alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)}_{=b} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} (-b)}_{=-b} = b - b = 0.$$

□

Remarques III.13.

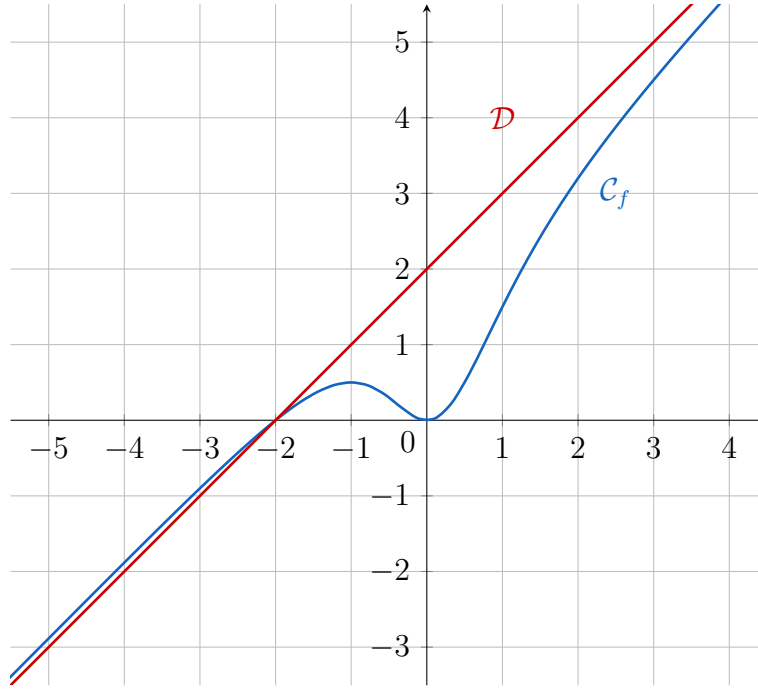
1. Ce résultat permet de chercher l'équation d'une asymptote en cherchant séparément (et dans cet ordre) le coefficient directeur (c'est-à-dire a) et l'ordonnée à l'origine (c'est-à-dire b). Il assure aussi l'unicité de l'asymptote (par unicité de la limite).
2. Si jamais $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ on a une branche parabolique d'axe vertical, comme c'est par exemple le cas pour les fonctions $x \mapsto e^x$ ou $x \mapsto x^2$.
3. Si jamais $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ mais que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, on a alors une branche parabolique oblique d'axe $\Delta : y = ax$, comme c'est par exemple le cas pour les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ ou $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exemple III.14. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1}$.

$$- \text{ pour } x \neq 0 : \frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 + 2x^2}{x^3 + x} = \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 1 ;$$

$$- f(x) - x = \frac{x^3 + 2x^2 - x^3 - x}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} = \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 2$$

donc la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.



IV Continuité et dérivation

Les principaux résultats seront démontrés dans un autre chapitre.

IV.1 Continuité

Définition IV.1. Si f est une fonction définie sur un intervalle I , et $a \in I$, on dit que f est **continue en** a si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si f est continue en tout point $a \in I$, on dira qu'elle est **continue sur** I .

Proposition-Définition IV.2. Soient I est un intervalle, $a \in I$, et f définie sur $I \setminus \{a\}$ telle que : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Alors f est **prolongeable par continuité en** a .

La fonction g définie sur I par :

$$\forall x \in I, g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ b & \text{si } x = a \end{cases}$$

est un prolongement de f continu en a .

Exemples IV.3.

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ est prolongeable par continuité en 0, car : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, en reconnaissant la limite du taux d'accroissement de la fonction exponentielle entre x et 0.
2. La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x \cdot \sin(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est le prolongement par continuité en 0 de $x \mapsto x \cdot \sin(\ln(x))$ (définie sur $\mathbb{R}_+^*$) car : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ (par encadrement).

Théorème IV.4 (Théorème des valeurs intermédiaires). Si f est continue sur un intervalle I , et $a, b \in I$, tout élément entre $f(a)$ et $f(b)$ possède au moins un antécédent par f entre a et b .

Remarque IV.5. Autrement dit : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exemple IV.6. Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue. Alors f possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0; 1]$ tel que $f(x) = x$.

Posons $g = f - \text{id}$. Pour tout $x \in [0; 1]$, on a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0.$$

On cherche donc à montrer que g s'annule, ce qui découle du théorème des valeurs intermédiaires, comme :

- $g = f - \text{id}$ est continue (différence de fonctions continues) sur l'intervalle $[0; 1]$;
- $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ (comme $f(0) \in [0; 1]$) ;
- $f(1) = f(1) - 1 \leq 0$ (comme $f(1) \in [0; 1]$).

Et on a donc bien un point fixe pour f . En revanche, on n'a pas l'unicité en général, par exemple la fonction id possède tout élément de $[0; 1]$ comme point fixe.

Théorème IV.7. Si f, g sont continues sur I et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg sont continues sur I . Si de plus g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ le sont également.

Théorème IV.8. Soit f continue sur I à valeurs dans J , et g continue sur J . Alors $g \circ f$ est continue sur I .

IV.2 Dérivabilité et dérivée

Définition IV.9. Si f est une fonction définie sur un intervalle I , et $a \in I$, on appelle **taux d'accroissement** de f en a la fonction :

$$\tau_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases}.$$

Si $\lim_{x \rightarrow a} \tau_a(x)$ existe et est finie, on dit que f est **dérivable en a** , et on définit son **nombre dérivé en a** par : $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \tau_a(x)$.

Si f est dérivable en tout point $a \in I$, on dira qu'elle est **dérivable sur I** , et la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée sa **fonction dérivée**.

Remarques IV.10.

1. Pour faciliter les calculs, on écrira plutôt : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
2. Le nombre $\tau_a(x)$ est le coefficient directeur de la droite passant par les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses a et x .
3. On notera parfois $\frac{d}{dx}(f(x))$ pour $f'(x)$ lorsque l'on voudra mettre en évidence que l'on dérive par rapport à x (lorsque l'expression $f(x)$ fait apparaître d'autres variables que x).

Exemples IV.11.

1. la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $a, h \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2a$$

et ainsi $f' : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{cases} ;$

2. la fonction $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0, car son taux d'accroissement en 0 est défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \tau_0(x) = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

qui n'admet pas de limite quand $x \rightarrow 0$.

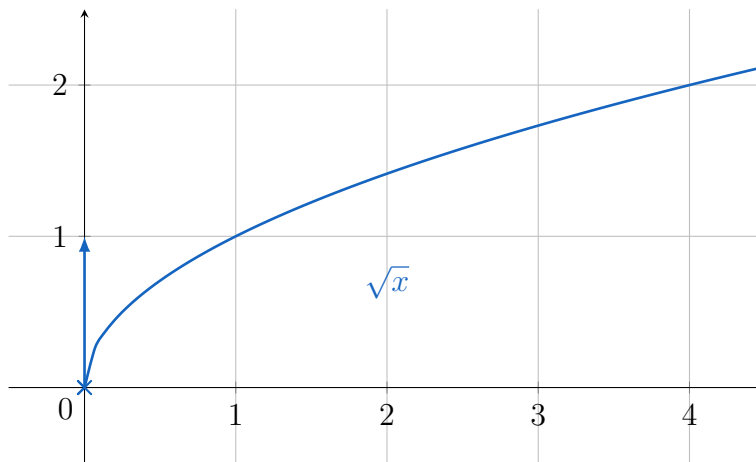
Théorème IV.12. Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Définition IV.13. Si f est dérivable en a , la **tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a** est la droite passant $(a, f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$, c'est-à-dire la droite d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Remarque IV.14. Si f n'est pas dérivable en a , mais que $\lim_{x \rightarrow a} \tau_a(x) = \pm\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ admet pour tangente en a la droite verticale passant par $(a, f(a))$, c'est-à-dire la droite d'équation : $x = a$. Par exemple, pour la fonction racine, le taux d'accroissement entre 0 et $h > 0$ est :

$$\tau_0(h) = \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h - 0} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$$

donc la fonction racine admet une (demi-)tangente verticale en 0, ce qu'on voit bien sur le tracé suivant :



Proposition IV.15. Si f, g sont dérivables sur I , et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors on a les fonctions dérivées suivantes :

1. $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ (la dérivation est linéaire) ;

2. $(fg)' = f'g + fg'$;

3. si g ne s'annule pas : $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$;

4. si g ne s'annule pas : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Théorème IV.16. Soient I, J deux intervalles, $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable, de dérivée :

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f'(x) \times g'(f(x)) \end{cases}.$$

Corollaire IV.17. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors :

1. si $n \in \mathbb{N}$, alors $u^n : x \mapsto (u(x))^n$ est dérivable sur I avec : $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$;
2. si u ne s'annule pas et $n \in \mathbb{Z}$, alors u^n est dérivable sur I avec : $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$;
3. la fonction $e^u : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I avec : $(e^u)' = u' \times e^u$;
4. si u est à valeurs strictement positives, $\ln(u) : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable avec : $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

Démonstration. On utilise la dérivée d'une composée. □

Remarque IV.18. On peut renforcer le dernier résultat : si u ne s'annule pas, alors $\ln(|u|)$ est dérivable avec $(\ln(|u|))' = \frac{u'}{u}$.

Exemple IV.19. La fonction $f : x \mapsto (\ln(x^2 + 1))^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$:

- comme $u : x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable et positive sur $\mathbb{R}$, alors $\ln(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2 + 1} ;$$
- donc $f = (\ln(u))^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{4x}{x^2 + 1} \times \ln(x^2 + 1).$$

IV.3 Variations d'une fonction dérivable

Proposition IV.20 (Monotonie et dérivée). Si f est dérivable sur un **intervalle** I , alors :

1. si f' est positive ou nulle, f est croissante ;
2. si f' est négative ou nulle, alors f est décroissante.

Proposition IV.21. Si **de plus** f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I , alors f est strictement monotone.

Remarque IV.22. Le résultat ne tient pas si I n'est pas un intervalle. Par exemple la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour dérivée $f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ qui est toujours négative, mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple IV.23. Reprenons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)\sin(x)^3$: elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée en x :

$$f'(x) = -\sin(x)^4 + 3\cos(x)^2\sin(x)^2 = \sin(x)^2 (4\cos(x)^2 - 1)$$

donc on déduit que sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

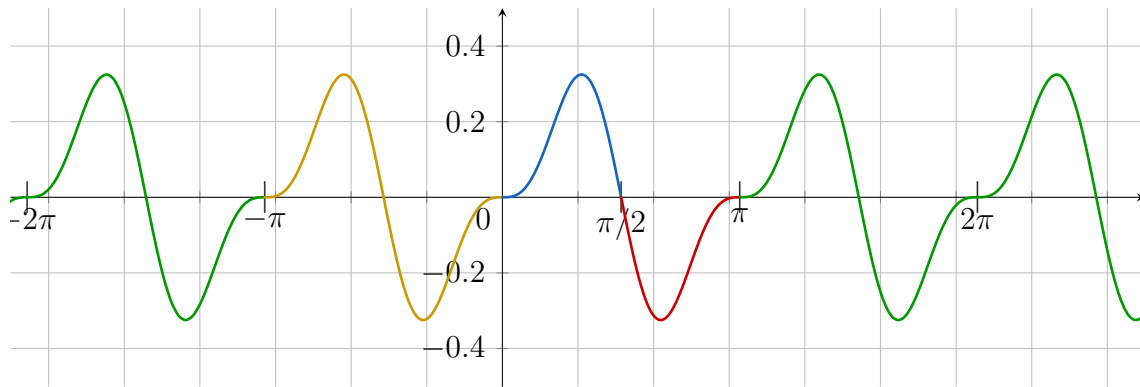
- f' s'annule en 0 et $\frac{\pi}{3}$;
- f' est strictement positive sur $\left]0; \frac{\pi}{3}\right[$;
- f' est strictement négative sur $\left]\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

D'où les variations suivantes :

x	0	$\pi/3$	$\pi/2$	
f'	0	+	0	−
f	0	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	0	

On trouve le tracé ci-dessous, où on fait :

- le tracé en bleu (par l'étude précédente) ;
- le tracé en rouge (par symétrie centrale) ;
- le tracé en orange (par symétrie axiale) ;
- le tracé en vert (par translation).



Corollaire IV.24. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors f est constante si, et seulement si, f' est nulle.

Démonstration. Si f est constante, son taux d'accroissement est toujours nul, donc sa dérivée aussi.

Si f' est nulle, alors f est à la fois croissante et décroissante. Ainsi, si $x, y \in I$ avec $x \leq y$, alors : $f(x) \leq f(y)$ et $f(x) \geq f(y)$, donc $f(x) = f(y)$ et f est constante. $\square$

IV.4 Dérivées d'ordre supérieur

Définition IV.25. Si f est définie sur I et $n \in \mathbb{N}$, on définit la **dérivée n -ème** de f (ou **dérivée d'ordre n**) comme :

$$f^{(n)} = \begin{cases} f & \text{si } n = 0 \\ (f^{(n-1)})' & \text{si } n \geq 1 \text{ et que } f^{(n-1)} \text{ est dérivable} \end{cases}$$

Si $f^{(n)}$ est bien définie, on dira que f est n -fois dérivable.

Si f est n -fois dérivable pour tout entier naturel n , on dira que f est **infiniment dérivable**.

Définition IV.26. On note $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I .

Si $k \in \mathbb{N}^*$, on dira que f est **de classe $\mathcal{C}^k$ sur I** si f est k -fois dérivable sur I et que $f^{(k)}$ est continue sur I . On note $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

Enfin, on note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur I , c'est-à-dire des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout entier naturel k .

Remarque IV.27. Comme une fonction dérivable est continue, les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sont exactement les fonctions infiniment dérivables.

Exemples IV.28.

1. La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, on a :
- sur $\mathbb{R}^*$: par produit et composée, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

- en 0 : on procède par taux d'accroissements. Pour $x \neq 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin(1/x) - 0}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

(par encadrement). Et ainsi f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

Et finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$f' : x \mapsto \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

La fonction f' n'a pas de limite en 0 (comme $x \mapsto \cos(1/x)$ non plus), donc f' n'est pas continue en 0.

Ainsi, la fonction f ainsi considérée est dérivable, mais c'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Elle l'est en revanche sur $\mathbb{R}^*$ (elle y est même infiniment dérivable).

2. La fonction $f : x \mapsto e^{2x}$ est infiniment dérivable. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est n fois dérivable avec $f^{(n)} : x \mapsto 2^n e^{2x}$.
- initialisation : la fonction f est bien 0 fois dérivable (comme toute fonction d'ailleurs), et on a : $f^{(0)} = f : x \mapsto e^{2x} = 2^0 e^{2x}$. Ce qui donne la bonne formule pour $n = 0$.
D'où l'initialisation.
 - hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est n fois dérivable avec $f^{(n)} : x \mapsto 2^n e^{2x}$. Alors :
 - f est $(n+1)$ fois dérivable, comme $f^{(n)}$ est dérivable par linéarité et composée ;
 - par linéarité et composée, on a :

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})' : x \mapsto 2^n \cdot 2e^{2x} = 2^{n+1} e^{2x}$$

ce qui donne la bonne formule.

D'où l'hérédité.

D'où la récurrence.

IV.5 Continuité et dérivabilité des fonctions réciproques

Théorème IV.29 (de la bijection monotone). Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$.

De plus, J est un intervalle et f^{-1} est continue et de même monotonie que f sur J .

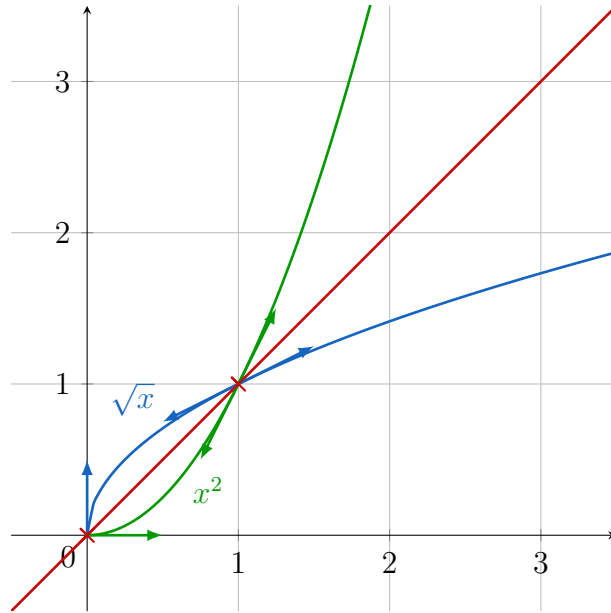
Exemple IV.30. Si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et que f est continue strictement croissante sur $[a; b]$, alors f réalise une bijection de $[a; b]$ dans $[f(a); f(b)]$: pour tout élément $c \in [f(a); f(b)]$, l'équation $f(x) = c$ admet une unique solution (dans $[a; b]$), qui est l'unique antécédent de c par f .

Remarque IV.31. C'est en fait une amélioration du TVI, dans le sens où les antécédents sont uniques.

Théorème IV.32 (dérivabilité des fonctions réciproques). Soit f est continue strictement monotone sur un intervalle I et $x \in \overset{\circ}{I}$. On suppose que f est dérivable en x , et on pose $y = f(x)$. Alors :

1. si $f'(x) \neq 0$: f^{-1} est dérivable en y , avec $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$;
2. si $f'(x) = 0$: f^{-1} n'est pas dérivable en y , et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale en (y, x) .

Remarque IV.33. On retrouve graphiquement le résultat avec les tangentes : si D est une droite de pente $a \neq 0$, sa symétrique par rapport à la première bissectrice est une droite de pente $\frac{1}{a}$.



Corollaire IV.34. Si I, J sont deux intervalles, f bijective de I sur J , dérivable sur I , et que f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J avec : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Exemple IV.35. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée : $x \mapsto 2x$.

En particulier, f' est positive ou nulle sur $\mathbb{R}_+$, ne s'annulant qu'en 0, donc f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.

Sa bijection réciproque est la fonction racine : $f^{-1} : y \mapsto \sqrt{y}$, qui vérifie :

- si $y \neq 0$: alors en notant $x = \sqrt{y}$, on a $f'(x) = 2x \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable en y , avec :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

- si $y = 0$: comme $f'(0) = 0$, $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0. ce qu'on avait déjà vu sur le graphe précédent.

Théorème IV.36. *On a les dérivées usuelles suivantes :*

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
c ($c \in \mathbb{C}$)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{Z}_-$)	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
<i>cas particulier</i> : $\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
x^α ($\alpha \in]1; +\infty[\setminus \mathbb{N}$)	$\mathbb{R}_+$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+$
x^α ($\alpha \in]0; 1[$)	$\mathbb{R}_+$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
<i>cas particulier</i> : $\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
x^α ($\alpha \in \mathbb{R}_-^* \setminus \mathbb{Z}$)	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
a^x ($a \in \mathbb{R}_+^*$)	$\mathbb{R}$	$\ln(a)a^x$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\log_b(x)$ ($b \in \mathbb{R}_+^*$)	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x \ln(b)}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\arcsin(x)$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arccos(x)$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\text{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\text{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\text{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\text{ch}(x)$	$\mathbb{R}$

Chapitre 4

Sommes, produits et systèmes

I Les notations $\sum$ et $\prod$

Définition I.1. Soient $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ un ensemble fini, et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de complexes indexée par I . On définit alors :

1. la **somme** de tous les éléments a_i , notée $\sum_{i \in I} a_i$, comme :

$$\sum_{i \in I} a_i = a_{i_1} + \dots + a_{i_n};$$

2. le **produit** de tous les éléments a_i , notée $\prod_{i \in I} a_i$, comme :

$$\prod_{i \in I} a_i = a_{i_1} \times \dots \times a_{i_n}.$$

Si $I = \llbracket n; m \rrbracket$, pour $n \leq m$ deux entiers, on notera :

$$\sum_{i \in \llbracket n; m \rrbracket} a_i = a_n + a_{n+1} + \dots + a_{m-1} + a_m = \sum_{i=n}^m a_i \text{ et } \prod_{i \in \llbracket n; m \rrbracket} a_i = a_n \cdot a_{n+1} \cdot \dots \cdot a_{m-1} \cdot a_m = \prod_{i=n}^m a_i.$$

Remarque I.2. Par convention, si $I = \emptyset$, on pose :

$$\sum_{i \in I} a_i = 0 \text{ et } \prod_{i \in I} a_i = 1.$$

Exemples I.3. 1. $\sum_{k=2}^5 k^3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 224;$

2. $\prod_{k=2}^5 k^3 = 2^3 \times 3^3 \times 4^3 \times 5^3 = 1\,728\,000.$

Remarques I.4. Les indices qui apparaissent dans une somme n'existent que dans cette somme, et leur dénomination est arbitraire. Ainsi :

1. $k \times \sum_{k=3}^{12} a_k$ n'est pas défini, mais $\sum_{k=3}^{12} k \times a_k$ l'est ;

2. $\sum_{k=4}^8 k^3 = \sum_{l=4}^8 l^3 = 1260.$

Proposition I.5. Avec les mêmes notations, si $a_i = \alpha$ ne dépend pas de $i \in I$, alors :

$$\sum_{i \in I} \alpha = \alpha \times \text{Card}(I) \text{ et } \prod_{i \in I} \alpha = \alpha^{\text{Card}(I)}.$$

En particulier, si $n \leq m$ sont deux entiers :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^m \alpha &= (m - n + 1)\alpha \text{ donc } \sum_{k=1}^n \alpha = n\alpha \text{ et } \sum_{k=0}^n \alpha = (n + 1)\alpha \\ \prod_{k=n}^m \alpha &= \alpha^{(m-n+1)} \text{ donc } \prod_{k=1}^n \alpha = \alpha^n \text{ et } \prod_{k=0}^n \alpha = \alpha^{n+1}. \end{aligned}$$

Proposition I.6 (Relation de Chasles). Si I_1, I_2 sont deux ensembles disjoints, alors :

$$\sum_{i \in I_1 \cup I_2} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \sum_{i \in I_2} a_i \text{ et } \prod_{i \in I_1 \cup I_2} a_i = \prod_{i \in I_1} a_i \times \prod_{i \in I_2} a_i.$$

En particulier, si $n < m$ sont deux entiers :

$$\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^m a_k \text{ et } \prod_{k=1}^m a_k = \prod_{k=1}^n a_k \times \prod_{k=n+1}^m a_k.$$

Remarque I.7. Si I_1 et I_2 ne sont pas disjoints, on peut écrire :

$$\sum_{i \in I_1 \cup I_2} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \sum_{i \in I_2} a_i - \sum_{i \in I_1 \cap I_2} a_i \text{ et } \prod_{i \in I_1 \cup I_2} a_i = \frac{\prod_{i \in I_1} a_i \times \prod_{i \in I_2} a_i}{\prod_{i \in I_1 \cap I_2} a_i}.$$

Exemple I.8. En partitionnant $\llbracket 0; 2n - 1 \rrbracket$, on peut calculer : $\sum_{k=0}^{2n-1} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$. En effet, pour $k \in \llbracket 0; 2n - 1 \rrbracket$:

- si k est pair : on écrit $k = 2i$, avec $i \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$, et alors : $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \lfloor i \rfloor = i$;
- si k est impair : on écrit $k = 2j + 1$, avec $j \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$, et alors : $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \lfloor j + \frac{1}{2} \rfloor = j$.

Et finalement :

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{j=0}^{n-1} j = 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1).$$

Proposition I.9 (Linéarité de la somme). Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, et $(a_i), (b_i)$ deux familles indexées par I fini :

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \left(\sum_{i \in I} a_i \right) + \mu \left(\sum_{i \in I} b_i \right).$$

Remarque I.10. Si $\lambda = \mu = 1$, ou si $\mu = 0$, ceci nous donne les cas particuliers :

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) + \left(\sum_{i \in I} b_i \right) \text{ et } \sum_{i \in I} (\lambda a_i) = \lambda \left(\sum_{i \in I} a_i \right).$$

Proposition I.11. Avec les mêmes notations :

$$1. \prod_{i \in I} (a_i^\lambda \times b_i^\mu) = \left(\prod_{i \in I} a_i^\lambda \right) \times \left(\prod_{i \in I} b_i^\mu \right) = \left(\prod_{i \in I} a_i \right)^\lambda \times \left(\prod_{i \in I} b_i \right)^\mu ;$$

$$2. \prod_{i \in I} (\lambda a_i) = \lambda^{\text{Card}(I)} \left(\prod_{i \in I} a_i \right).$$

Remarque I.12. Attention à l'exposant pour le produit !

Proposition I.13 (Changement d'indice). Si I, J sont deux ensembles, $f : I \rightarrow J$ une bijection et $(a_j)_{j \in J}$ une famille de complexes indexée par J , alors :

$$\sum_{j \in J} a_j = \sum_{i \in I} a_{f(i)}.$$

Inversement, si $(b_i)_{i \in I}$ est une famille de complexes indexée par I , alors :

$$\sum_{i \in J} b_i = \sum_{j \in J} b_{f^{-1}(j)}.$$

En particulier :

$$\sum_{j=n}^m a_j = \sum_{i=0}^{m-n} a_{i+n}.$$

Et les résultats précédents restent vrais en changeant les sommes en produits.

II Sommes classiques

Proposition II.1 (Sommes et produits télescopiques). Si $n \leq m$ sont des entiers et $(a_i)_{i \in \llbracket n; m+1 \rrbracket}$ est une famille de complexes alors :

$$\sum_{k=n}^m (a_{k+1} - a_k) = a_{m+1} - a_n.$$

Si de plus les a_i sont non-nuls :

$$\prod_{k=n}^m \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{m+1}}{a_n}.$$

Exemples II.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

1. si $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, alors : $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$, et donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1};$$

2. si $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, alors : $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$, et donc :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right) = n+1.$$

Proposition II.3 (Somme géométrique). Si q est un complexe et $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}.$$

Démonstration. Si $q = 1$, alors : $\sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$.

Si $q \neq 1$, alors :

$$\begin{aligned} (1 - q) \times \sum_{k=0}^n q^k &= \sum_{k=0}^n (q^k - q^{k+1}) \text{ par linéarité} \\ &= 1 - q^{n+1} \text{ par télescopage} \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Corollaire II.4. Si $q \neq 1$ est un complexe, $n \leq m$ deux entiers, et (a_k) est une suite **géométrique** de raison q (c'est-à-dire que pour tout entier k : $a_{k+1} = q \times a_k$), alors :

$$\sum_{k=n}^m a_k = \frac{a_n - a_{m+1}}{1 - q} = a_n \times \frac{1 - q^{m-n+1}}{1 - q} = (\text{Premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

Démonstration. Une récurrence immédiate montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $a_{n+k} = a_n \times q^k$.

Le résultat découle par linéarité du point précédent. □

Exemple II.5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=5}^{n+12} 2^{3k+1} = 2^{16} \cdot \frac{8^{n+8} - 1}{7}$$

en reconnaissant une somme géométrique de raison $8 \neq 1$ de premier terme $2^{16} = 65536$ et comportant $n + 12 - 5 + 1 = n + 8$ termes.

Proposition II.6 (Sommages arithmétiques). Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration. Par changement d'indice, on a : $\sum_{k=0}^n k = \sum_{l=0}^n (n - l)$. Et ainsi :

$$2 \times \sum_{k=0}^n k = \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n (n - k) = \sum_{k=0}^n n = n(n+1)$$

ce qui donne le résultat voulu. □

Corollaire II.7. Si r est un complexe, $n \leq m$ deux entiers, et (a_k) est une suite **arithmétique** de raison r (c'est-à-dire que pour tout entier k : $a_{k+1} = a_k + r$), alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^m a_k &= (m - n + 1) \times a_n + \frac{(m - n)(m - n + 1)}{2} \times r = \frac{a_n + a_m}{2} \times (m - n + 1) \\ &= \frac{\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes} \\ &= \text{Moyenne des termes} \times \text{nombre de termes} \end{aligned}$$

Démonstration. Une récurrence immédiate montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $a_{n+k} = a_n + k \times r$.

Le résultat découle par linéarité du point précédent. □

Exemple II.8. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=5}^{n+12} 3k + 1 = \frac{16 + 3n + 37}{2}(n + 8) = \frac{(3n + 53)(n + 8)}{2}$$

en reconnaissant une somme arithmétique (de raison 3 mais c'est inutile) de premier terme 16, de dernier terme $3n + 37$ et comportant $n + 12 - 5 + 1 = n + 8$ termes.

Proposition II.9. Si a, b sont deux complexes, et $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a - b) \times (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = (a - b) \times \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1} . \end{aligned}$$

Démonstration. On développe directement la somme :

$$\begin{aligned} (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k &= \sum_{k=0}^{n-1} (a^{n-k} b^k - a^{n-k-1} b^{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (a^{n-k} b^k - a^{n-(k+1)} b^{k+1}) \\ &= a^n - b^n \text{ par télescopage} \end{aligned}$$

□

Remarques II.10. 1. pour $n = 2$, on retrouve l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;

2. on pouvait aussi reconnaître une somme géométrique de raison $\frac{b}{a}$, mais cela demanderait des disjonctions de cas suivant les valeurs de a et b ;

3. inversement, on retrouve la somme géométrique en prenant $a = 1$ et $b = q$.

Corollaire II.11. Si de plus n est impair, alors :

$$a^n + b^n = (a + b) \times (a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a + b) \times \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k .$$

Démonstration. Comme n est impair, alors $(-1)^n = -1$, et donc : $a^n + b^n = a - (-b)^n$. Et on applique le résultat précédent. □

Proposition II.12 (Sommes quadratique et cubique). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} 1. \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ; \\ 2. \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} . \end{aligned}$$

Démonstration. Le premier résultat a été montré au chapitre 1.

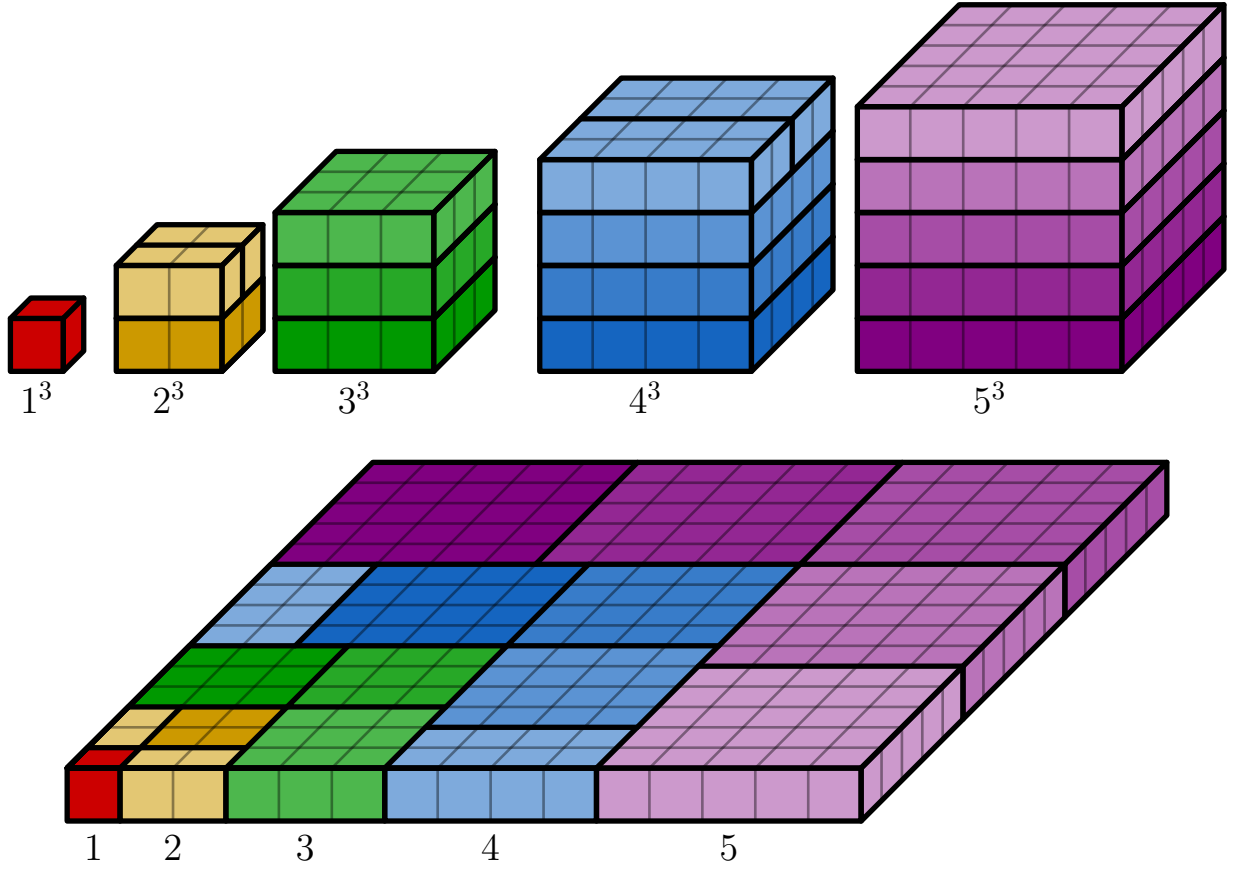
Le second est laissé en exercice. □

Remarque II.13. Le second résultat peut aussi se lire comme :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

ce que l'on peut voir géométriquement. L'idée étant que l'aire d'un carré de côté $1 + 2 + \dots + n$ doit être égale à $1 + 2^3 + \dots + n^3$.

Pour cela, on peut voir que, au moment d'augmenter la longueur du carré de n , on rajoute une bande dont l'aire peut être découpée en n carrés de taille $n \times n$. C'est-à-dire qu'on augment l'aire totale de $n \times n^2 = n^3$. Ce dernier point est illustrée sur la figure ci-dessous :



III Factorielle et coefficients binomiaux

Définition III.1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la **factorielle** de n par :

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 = \prod_{k=1}^n k$$

et on pose par convention $0! = 1$.

Remarque III.2. On peut aussi définir la factorielle récursivement par :

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \times ((n-1)!) & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Définition III.3. Si $n, k \in \mathbb{N}$ (et éventuellement $k \in \mathbb{Z}$), on définit le **coefficient binomial** “ k parmi n ” par :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}.$$

Remarque III.4. La quantité $\binom{n}{k}$ correspond aux nombres de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments.

Proposition III.5. Si $k, n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Exemple III.6. On a les valeurs particulières suivantes :

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$;
2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$;
3. $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Proposition III.7 (Triangle de Pascal). Si $k, n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Démonstration. On procède par disjonction de cas.

Si $k > n$: toutes les sommes sont nulles.

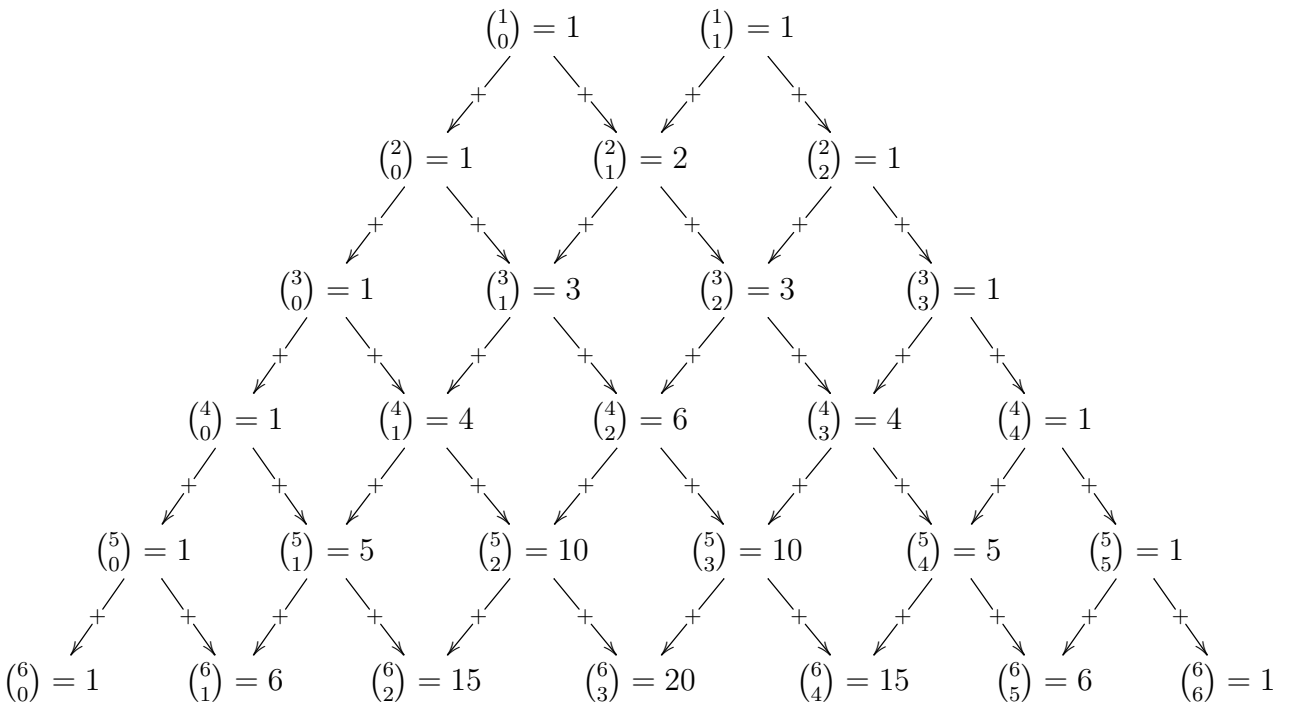
Si $k = n$: on trouve : $1 + 0 = 1$.

Si $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\ &= \frac{n! \times (k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n! \times (n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n! \times (k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

□

Remarque III.8. Le triangle de Pascal permet de calculer de proche en proche tous les coefficients binomiaux. On représente sur la n -ème ligne les coefficients $\binom{n}{k}$ pour $0 \leq k \leq n$:



Corollaire III.9. Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$: $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Démonstration. En utilisant le triangle de Pascal, montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition :

$$P(n) : \forall k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} \in \mathbb{N}''.$$

— initialisation : pour $n = 0$: Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\binom{0}{k} = \begin{cases} 1 \in \mathbb{N} & \text{si } k = 0 \\ 0 \in \mathbb{N} & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

ce qui prouve la propriété $P(0)$ par disjonction de cas.

— hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors :

— si $k = 0$: $\binom{n+1}{k} = 1 \in \mathbb{N}$;

— si $k > 0$: par triangle de Pascal : $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ Par hypothèse de récurrence : $\binom{n}{k-1}, \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Par somme, on déduit : $\binom{n+1}{k} \in \mathbb{N}$.

Donc par disjonction de cas : $\binom{n+1}{k} \in \mathbb{N}$. D'où l'hérédité.

D'où la récurrence. □

Proposition III.10. Si $n, k \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

Démonstration. Le cas $k > n$ est immédiat.

Si $k \leq n$:

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

□

Théorème III.11 (Formule du binôme de Newton). Si $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 0$: $(a+b)^n = (a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &\stackrel{\text{définition}}{=} (a+b) \times (a+b)^n \stackrel{HR}{=} (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
 &\stackrel{\text{linéarité}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &\stackrel{\text{changement d'indice}}{=} \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^l b^{n+1-l} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &\stackrel{\text{Chasles}}{=} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
 &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} \\
 &= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1-0} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 \\
 &\stackrel{\text{Chasles}}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
 \end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence. □

Exemples III.12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$;
2. $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0$;
3. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k \cdot 1^{n-k} = (n+1)^n$;
4. En revanche, on ne peut pas faire apparaître une formule du binôme dans la somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^k$, car le nombre que l'on met à la puissance (à sa voir k ici) change lors de la sommation.
5. $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} 2^{3k+2} = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} 2^{3l+5} = 2^5 \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} 8^l = 2^5 \cdot 9^{n-1}$.
6. $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} = 2^n - n - 1$
7. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{2n-k} = 3^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} = 3^n \cdot 5^n = 15^n$
8. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{3k} 5^{n-k/2} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 8^k \sqrt{5}^{2n-k} = \sqrt{5}^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 8^k \sqrt{5}^{n-k} = \sqrt{5}^n (8 + \sqrt{5})^n$
9. Posons :

$$A_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}.$$

Alors, par changement d'indice, on trouve :

Démonstration. Le système admet une unique solution si, et seulement si, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes. Les vecteurs (a, b) et (c, d) sont des vecteurs normaux à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Donc les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes si, et seulement si : $\det((a, b), (c, d)) \neq 0$, c'est-à-dire $ad - bc \neq 0$. $\square$

Proposition IV.5. Si $(n, p) = (2, 3)$, résoudre le système :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} ax + by + cz = g \\ dx + ey + fz = h \end{cases}$$

où $(a, b, c), (d, e, f) \neq (0, 0, 0)$, revient à chercher l'intersection des plans $\mathcal{P}_1 : ax + by + cz = g$ et $\mathcal{P}_2 : dx + ey + fz = h$:

1. si les plans sont confondus : il y a une infinité de solutions (tous les points de $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$) ;
2. si les plans sont parallèles distincts : il n'y a pas de solutions ;
3. si les plans sont sécants : il y a une infinité de solutions (tous les points de la droite $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$).

Définition IV.6. Un système est dit **échelonné** si le premier coefficient non nul de chaque ligne, qu'on appelle **pivot**, est situé strictement à gauche des pivots des lignes suivantes.

Remarque IV.7. Si on note j_i l'indice du pivot de la ligne L_i , cela revient à dire qu'il existe $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que : les lignes $L_{k+1}, \dots, L_n$ du système homogène sont nulles, et que $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a_{1,j_1}x_{j_1} + \dots + \dots + \dots = b_1 \\ 0 + 0 + a_{2,j_2}x_{j_2} + \dots + \dots = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + a_{k,j_k}x_{j_k} + \dots = b_k \end{cases}$$

Exemple IV.8. Le système suivant est échelonné :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ \quad 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ \quad \quad -x_3 = 1 \end{cases}.$$

Définition IV.9. Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système sont :

1. la **permutation** : on échange les lignes L_i et L_j , codée par $L_i \leftrightarrow L_j$;
2. la **dilatation** : multiplication d'une ligne par un scalaire λ non nul, codée par $L_i \leftarrow \lambda L_i$;
3. la **transvection** : ajout à la ligne L_i d'un multiple de la ligne L_j , codée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Remarques IV.10.

1. Il faut bien considérer **toute** la ligne à chaque fois (y compris b_i).
2. L'ordre des opérations a une importance, et on les fait **successivement**.

Définition IV.11. On dit que deux systèmes linéaires sont **équivalents** si l'on peut passer de l'un à l'autre par une succession finie d'opérations élémentaires.

Remarque IV.12. On peut "revenir en arrière" après avoir fait une opération élémentaire, et ceci à l'aide d'une autre opération élémentaire. Plus précisément :

- une permutation est annulée par elle-même ;
- une dilatation de rapport λ est annulée par la dilatation de la même ligne de rapport $\frac{1}{\lambda}$;
- une transvection de coefficient λ est annulée par la dilatation des mêmes lignes de coefficient $-\lambda$.

En conséquence, la relation "être équivalent" sur les systèmes est une relation d'équivalence.

Théorème IV.13. Deux systèmes équivalents ont même ensemble solution.

Démonstration. Constatons déjà que chaque opération élémentaire ne peut qu'agrandir l'ensemble solution du système initial. Ceci est clair car un système d'égalité est bien préservé quand on les combine par les opérations élémentaires.

Comme on peut revenir en arrière par d'autres opérations élémentaires, le résultat découle par double inclusion. $\square$

Théorème IV.14 (Algorithme du pivot de Gauss–Jordan). *Tout système est équivalent à un système échelonné. La succession d'opérations élémentaires est donnée par la méthode de Gauss–Jordan.*

Remarque IV.15. *L'intérêt est qu'un système échelonné est très facile à résoudre par méthode de remontée : on résout les équations avec le moins d'inconnues, puis les réinjecte dans les précédentes.*

Les inconnues qui n'apparaissent pas comme pivots sont alors choisies librement et constituent des paramètres pour décrire l'ensemble solution.

Méthode IV.16. *La méthode se fait récursivement selon le nombre d'inconnues du système. On considère le système :*

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

- si tous les $a_{i,1}$ sont nuls : alors la première colonne du système est nulle, et on continue à échelonner suivant les colonnes suivantes ;
- sinon : quitte à permuter deux lignes, on a $a_{1,1} \neq 0$. On fait pour tout $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$ la transvection : $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}L_1$. La première colonne du système a seulement son premier coefficient non nul. Le système obtenu est de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ 0 + a'_{2,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b'_2 \\ \vdots \\ 0 + a'_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b'_n \end{cases}$$

où, pour tout $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 2; p \rrbracket$ on a :

$$a'_{i,j} = a_{i,j} - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}a_{1,j} \text{ et } b'_j = b_j - \frac{a_{1,1}}{a_{1,1}}b_1.$$

et il suffit alors d'échelonner le système :

$$(\mathcal{S}') : \begin{cases} a'_{2,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b'_n \end{cases}$$

Remarque IV.17. *En pratique, on prendra un pivot qui facilite les expressions $\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$ (par exemple avec $a_{1,1} = 1$).*

Corollaire IV.18. *Un système **compatible** (par exemple homogène) à n équations et p inconnues possède une infinité de solutions dès lors que $p > n$.*

En particulier, il admet une solution non nulle.

Démonstration. On échelonne le système, ce qui donne un système échelonné, à n équations.

Comme $p > n$, alors l'une des inconnues n'apparaît pas comme pivot, donc peut être choisie librement dans $\mathbb{K}$.

Pour chacune des valeurs choisies, la remontée permet de trouver une solution au système. L'infinité de l'ensemble solution découle alors de l'infinité de $\mathbb{K}$. $\square$

Exemple IV.19. Résoudre le système à 3 équations et 3 inconnues :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}) : & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \\
 (\mathcal{S}) \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -3x_2 + 3x_3 = -3 \\ -3x_2 + 7x_3 = -5 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -3x_2 + 3x_3 = -3 \\ + 4x_3 = -2 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x_3 = -1/2 \\ x_2 = 1 + x_3 = 1/2 \\ x_1 = 2 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc le système admet pour unique solution $(1, 1/2, -1/2)$.

Exemple IV.20. Résoudre le système à 3 équations et 3 inconnues :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}) : & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \\
 (\mathcal{S}) \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -3x_2 + 3x_3 = -3 \\ -7x_2 + 7x_3 = -7 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -3x_2 + 3x_3 = -3 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{3}L_2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x_3 = x_3 \\ x_2 = 1 + x_3 \\ x_1 = 2 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc le système admet pour solutions exactement tous les triplets de la forme $(1, 1 + x_3, x_3)$ pour $x_3 \in \mathbb{K}$.

Exemple IV.21. Résoudre le système à 3 équations et 3 inconnues :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}) : & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \\
 (\mathcal{S}) \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -3x_2 + 3x_3 = -3 \\ -7x_2 + 7x_3 = -5 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -3x_2 + 3x_3 = -3 \\ 0 = 2 \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{3}L_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc le système n'admet aucune solution.

Exemple IV.22. Résolvons le système $(S) : \{x + 2y + 3z = 4$.

Le système est déjà échelonné. On a donc :

$$(S) \Leftrightarrow x = 4 - 2y - 3z$$

donc l'ensemble solution est : $\{(4 - 2y - 3z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.

Remarques IV.23.

1. Dans le premier exemple, on vérifie bien que l'unique solution trouvée est bien une solution. On peut le faire pour quelques solutions dans le deuxième exemple (par exemple pour $(1, 1, 0)$ ou $(1, 0, -1)$), ce qui permet souvent de détecter une erreur de calcul.
2. En pratique, on préfère faire apparaître les paramètres avec des lettres grecques $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \dots)$. Et donc on écrirait plutôt l'ensemble solution précédent comme :

$$\{(1, 1 + \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

3. On aurait pu échelonner différemment, en faisant disparaître x_2 (au lieu de x_3). On aurait ainsi choisi x_2 librement (et non x_3), ce qui aurait donné le même ensemble solution, mais sous la forme :

$$\{(1, \lambda, -1 + \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

4. Dans le deuxième exemple, le point clef est que l'on ne donne des rôles aux différentes inconnues : en faisant la remontée, on choisit sur chaque ligne une inconnue exprimée qui n'a pas encore de rôle, qui sera un pivot, et les autres sont choisit par défaut comme paramètres.

Chapitre 5

Les fonctions usuelles

I Logarithmes, exponentielles et puissances

I.1 La fonction logarithme

Définition I.1. On appelle **fonction logarithme népérien** l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1. On la note $\ln$ ou Log .

Théorème I.2. Si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors :

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$;
3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
4. $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

Démonstration.

1. Si $a, b > 0$, on considère la fonction $f_b : x \mapsto \ln(xb) - \ln(x)$
Alors f_b est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{b}{xb} - \frac{1}{x} = 0$.
Donc f_b est constante, donc : $f(a) = f(1)$, donc : $\ln(ab) - \ln(a) = \ln(b)$.
2. On déduit : $0 = \ln(1) = \ln\left(a\frac{1}{a}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$.
3. De même : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
4. Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(a^n) = n\ln(a)$. Puis : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(a^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{a^n}\right) = -n\ln(a)$.

□

Proposition I.3. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

Démonstration. — $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ donc $\ln$ est strictement croissante ;

— montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, c'est-à-dire que :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x > B \Rightarrow \ln(x) > A.$$

Soit $A \in \mathbb{R}$.

Par stricte croissante, on a : $\ln(2) > \ln(1) = 0$.

Posons $N = \left\lfloor \frac{A}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$ (qui est un entier). Alors :

$$\ln(2^N) = N \cdot \ln(2) \geq \frac{A}{\ln(2)} \cdot \ln(2) = A.$$

Par croissance de $\ln$, $B = 2^N$ convient.

— $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = -\infty$.

□

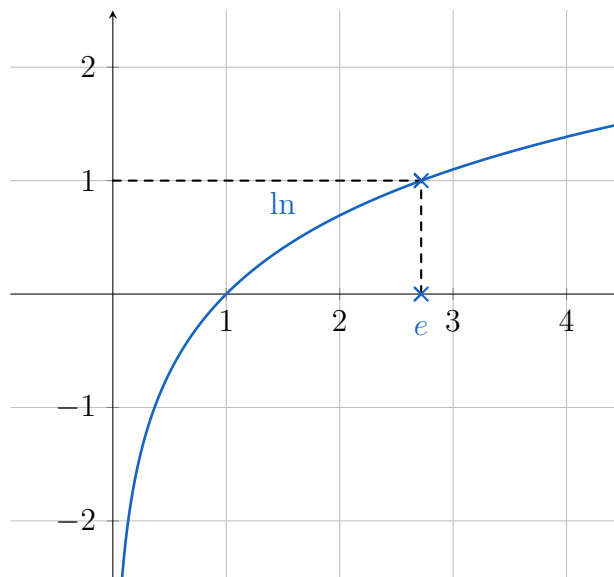
Corollaire I.4. La fonction $\ln$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Découle de la continuité de $\ln$: avec le résultat précédent, on peut bien utiliser le théorème de la bijection monotone. □

Proposition I.5. L'équation $\ln(x) = 1$ possède une unique solution : on la note e , et on a $e \simeq 2,71828$.

Proposition I.6. On a le tableau de variations et la représentation graphique suivants :

x	0	$+\infty$
$\ln'$		+
$\ln$		$+\infty$ ↗ $-\infty$



Définition I.7. Si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on lui associe la fonction **logarithme de base a** , notée $\log_a$, comme la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Remarques I.8.

1. On utilise beaucoup le logarithme en base 2, aussi appelé **logarithme binaire**, et le logarithme en base 10, aussi appelé **logarithme décimal**, et noté parfois $\log$.
2. Le logarithme népeirien est le logarithme de base e .

Proposition I.9. La fonction $\log_a$ réalise une bijection strictement monotone de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$.

Elle est strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$, et vérifie les formules du théorème I.2.

I.2 La fonction exponentielle

Théorème-Définition I.10. On définit la fonction **exponentielle (népeirienne)**, notée $\exp$, comme la réciproque de la fonction $\ln$.

Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y).$$

La fonction $\exp$ est continue, strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée elle-même.

Démonstration. L'existence, la continuité et la monotonie découlent des propriétés de $\ln$.

Comme $\ln' = x \mapsto \frac{1}{x}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $\exp$ est dérivable sur $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.

Si $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x).$$

□

Remarque I.11. On notera plutôt e^x au lieu de $\exp(x)$.

La raison étant que, si $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\ln(e^n) = n\ln(e) = n$, donc $\exp(n) = e^n$.

Théorème I.12. Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors :

1. $e^{a+b} = e^a e^b$;
2. $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$;
3. $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$;
4. $e^{na} = (e^a)^n$.

Démonstration. Découle des propriétés analogues du $\ln$. Montrons par exemple la première.

Par définition de $\exp$, on a :

$$e^{a+b} = e^a e^b \Leftrightarrow a + b = \ln(e^a e^b)$$

Mais pas propriété de $\ln$, on a :

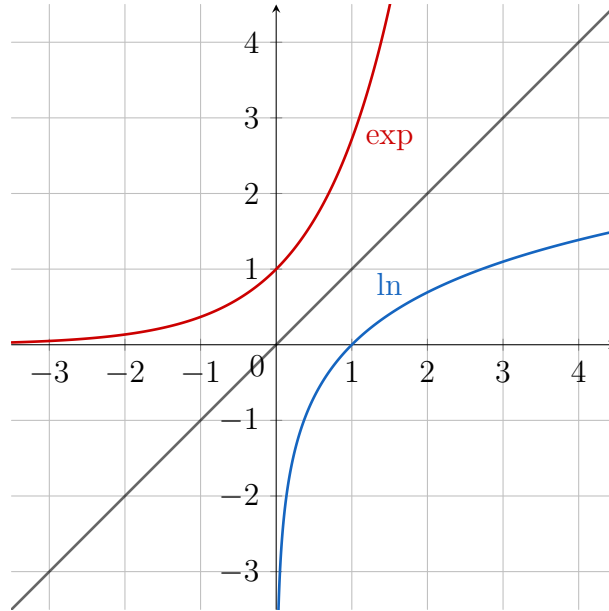
$$\ln(e^a e^b) = \ln(e^a) + \ln(e^b) = a + b$$

et ainsi on a bien $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$.

□

Proposition I.13. On a le tableau de variations et la représentation graphique suivants :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'$	+	
$\exp$	0	$+\infty$



I.3 Les fonctions puissances et exponentielles

Définition I.14. Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit le nombre a **puissance** α comme : $a^\alpha = \exp(\alpha \ln(a))$.

Remarque I.15. La notation x^n , pour $x < 0$, n'a de sens que si $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition I.16. Si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors :

1. $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta$ et $a^{\alpha-\beta} = \frac{a^\alpha}{a^\beta}$;
2. $(a^\alpha)^\beta = (a^{\alpha\beta}) = (a^\beta)^\alpha$;
3. $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$.

Définition I.17. Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle fonction **exponentielle de base a** la fonction $\exp_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$.

Proposition I.18. La fonction $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec : $\forall x \in \mathbb{R}, (\exp_a)'(x) = \ln(a) \cdot a^x$:

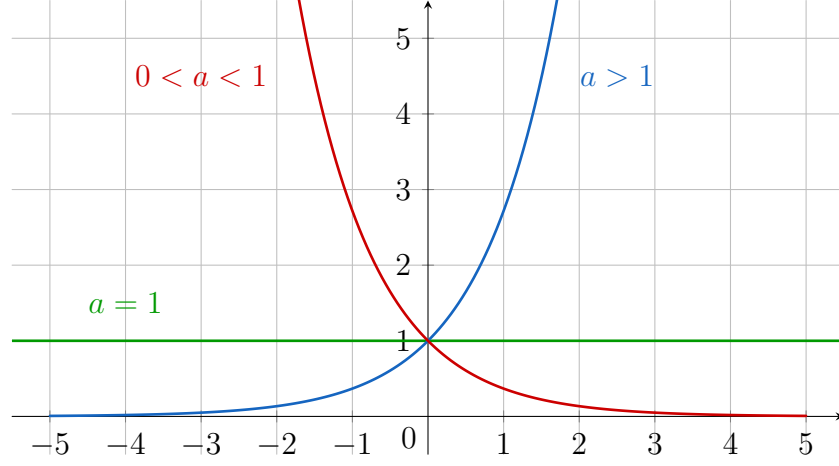
1. si $a = 1$: elle est constante de valeur 1 ;
2. si $a > 1$: elle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
3. si $a < 1$: elle réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. La dérivabilité et la dérivée sont données par composition. Les limites aux bornes également. On conclut par théorème de la bijection monotone pour les cas où $a \neq 1$. $\square$

Proposition I.19. On a les tableaux de variations et les courbes représentatives “génériques” suivants :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp_a$ $a > 1$		1	$+\infty$
	0		

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp_a$ $a < 1$	$+\infty$	1	0



Définition I.20. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle fonction **puissance** α la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.

Proposition I.21. La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'_\alpha(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$:

1. si $\alpha = 0$: elle est constante de valeur 1, et prolongeable par continuité en 0 ;
2. si $\alpha < 0$: elle réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, avec pour asymptotes les axes du repère ;
3. si $\alpha > 0$: elle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même.

Démonstration. Par dérivabilité des fonctions composées, f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'_\alpha(x) = \alpha \frac{1}{x} e^{\alpha \ln(x)} = \alpha x^{-1} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Ainsi, f'_α est du signe de α , ce qui donne la monotonie cherchée.

Le théorème de la bijection monotone donne la bijectivité lorsque $\alpha \neq 0$ (f_α étant dérivable, elle est bien continue). Reste à calculer les limites aux bornes pour avoir l'ensemble image :

- si $\alpha > 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\alpha \ln(x)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha \ln(x)} = +\infty$;
- si $\alpha < 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\alpha \ln(x)} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha \ln(x)} = 0$.

Ce qui donne bien la bijectivité annoncée.

Et le dernier point donne les asymptotes. □

Proposition I.22. Si $\alpha \neq 0$, alors : $f_\alpha^{-1} = f_{\frac{1}{\alpha}}$.

Démonstration. Soit $\alpha \neq 0$. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors par opérations sur les logarithmes et les exponentielles on a :

$$f_\alpha(x) = y \Leftrightarrow \exp(\alpha \ln(x)) = y \Leftrightarrow \alpha \ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{1}{\alpha} \ln(y)\right) = f_{1/\alpha}(y)$$

ce qui donne le résultat. □

Remarque I.23. On pouvait aussi constater que :

$$f_\alpha\left(f_{\frac{1}{\alpha}}(x)\right) = \left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = x^{\frac{\alpha}{\alpha}} = x.$$

Proposition I.24. Si $\alpha > 0$, la fonction f_α est prolongeable par continuité en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$. Son prolongement est :

1. non dérivable en 0, avec une tangente verticale, si $0 < \alpha < 1$;
2. dérivable en 0, de dérivée 1, si $\alpha = 1$;
3. dérivable en 0, de dérivée nulle, si $\alpha > 1$.

Démonstration. Le prolongement continu découle des limites calculées précédemment. Pour $x > 0$, le taux d'accroissement de f_α entre 0 et x est donné par :

$$\tau_0(x) = \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x - 0} = x^{\alpha-1} = f_{\alpha-1}(x)$$

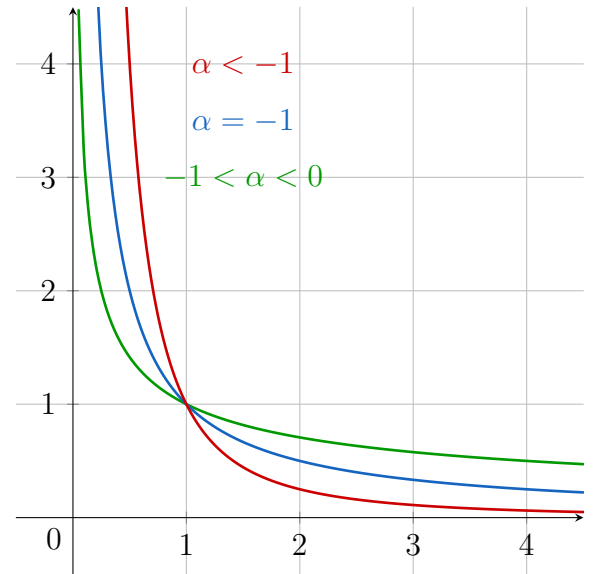
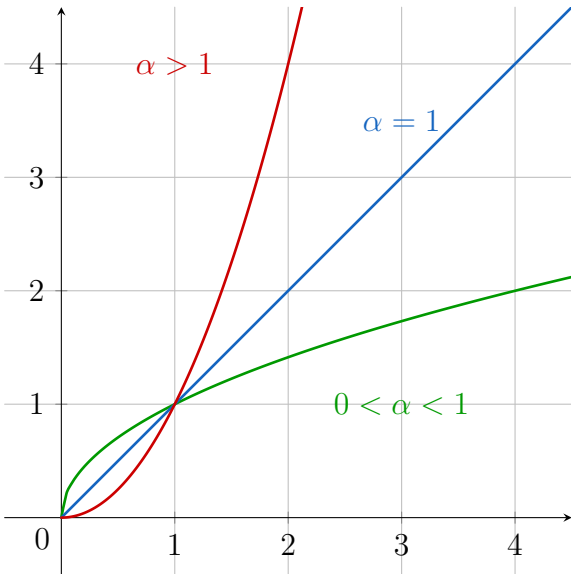
et on peut alors utiliser les limites calculées précédemment.

On trouve bien le résultat voulu, où la disjonction suivant le signe de $\alpha - 1$ nous donne bien les trois cas de la proposition. $\square$

Proposition I.25. On a les tableaux de variations et les courbes représentatives “génériques” suivants :

x	0	1	$+\infty$
f_α $\alpha > 0$	0	1	$+\infty$

x	0	1	$+\infty$
f_α $\alpha < 0$	$+\infty$	1	0



I.4 Comparaisons et limites

Théorème I.26 (Croissances comparées). Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha |\ln(x)|^\beta = 0$;
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$;
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$.

Démonstration.

$$1. \text{ Considérons } \varphi : \begin{cases} [1; +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \ln(t) - 2\sqrt{t} \end{cases}.$$

Alors φ est dérivable sur $[1; +\infty[$, de dérivée en t : $\varphi'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1 - \sqrt{t}}{t} \leq 0$.

Donc φ est décroissante sur $[1; +\infty[$: comme $\varphi(1) = -2 < 0$, alors φ est strictement négative sur $[1; +\infty[$.

Si $x \geq 1$, on a donc : $0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$, donc : $0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Par encadrement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

En posant $y = x^\alpha$, donc $x = y^{\frac{1}{\alpha}}$, on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y^{\frac{1}{\alpha}})}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\ln(y)}{y} = 0$$

ce qui donne le cas $\beta = 1$.

Le cas $\beta \leq 0$ est immédiat (on n'a pas une forme indéterminée). Considérons donc $\beta > 0$. Alors :

$$\frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = \left(\frac{\ln(x)}{x^{\alpha/\beta}} \right)^\beta$$

ce qui donne par le résultat précédent et l'étude en 0 de la fonction $x \mapsto x^\beta$ (comme $\beta > 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = \lim_{y \rightarrow 0} y^\beta = 0.$$

2. On pose $y = \frac{1}{x}$, donc $x = \frac{1}{y}$. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha |\ln(x)|^\beta = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\left| \ln\left(\frac{1}{y}\right) \right|^\beta}{y^\alpha} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(y))^\beta}{y^\alpha} = 0.$$

$$3. \ln\left(\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta}\right) = \alpha x - \beta \ln(x) = \alpha x \times \left(1 - \frac{\beta \ln(x)}{\alpha x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc en composant avec la fonction exponentielle : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$.

$$4. \ln(|x|^\beta e^{\alpha x}) = \alpha x + \beta \ln(|x|) = \alpha x \times \left(1 + \frac{\beta \ln|x|}{\alpha x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$$

donc en composant avec la fonction exponentielle : $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$.

□

Remarques I.27.

1. L'exponentielle croît infiniment plus vite que les puissances, qui croissent infiniment plus vite que le logarithme. Cela se manifeste dans les limites précédentes en notant que, dans le cas de formes indéterminées, c'est la partie "dominante" qui donne la limite.
2. Les cas où $\beta > 0$ sont en fait les seuls cas intéressants : si $\beta \leq 0$, on n'a pas de forme indéterminée, et un calcul direct donne la limite (par quotient ou produit).

Exemples I.28. Pour déterminer une limite, on commence par regarder si les limites classiques et les opérations sur les limites suffisent. Sinon, c'est qu'on obtient une forme indéterminée : il faut alors transformer l'expression habilement pour faire disparaître ces formes indéterminées.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3+1)}{x^4-5} :$$

$$\frac{\ln(x^3+1)}{x^4-5} = \frac{\ln(x^3+1)}{x^3+1} \times \frac{x^3+1}{x^4-5} = \underbrace{\frac{\ln(x^3+1)}{x^3+1}}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{\frac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{5}{x^4}}}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^4+1)}{x^2+3} :$$

$$\frac{\ln(x^4+1)}{x^2+3} = \frac{\ln(x^4+1)}{x^4+1} \times \frac{x^4+1}{x^2+3} = \underbrace{\frac{\ln(x^4+1)}{(x^4+1)^{1/2}}}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{\frac{(1+\frac{1}{x^4})^{1/2}}{1+\frac{3}{x^2}}}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x+2} :$$

$$\frac{e^{3x}}{x+2} = \underbrace{\frac{e^{3x}}{3x}}_{\rightarrow +\infty} \times \underbrace{\frac{3x}{x+2}}_{\rightarrow 3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x^3+1} :$$

$$\frac{e^{3x}}{x^3+1} = \underbrace{\frac{e^{3x}}{(3x)^3}}_{\rightarrow +\infty} \times \underbrace{\frac{(3x)^3}{x^3+1}}_{\rightarrow 27} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^7+12} :$$

$$\frac{e^{x^2}}{x^7+12} = \underbrace{\frac{e^{x^2}}{(x^2)^4}}_{\rightarrow +\infty} \times \underbrace{\frac{(x^2)^4}{x^7+12}}_{\rightarrow +\infty} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-3x\ln x+\ln x}{e^x+x\sin x} :$$

$$\frac{x^3-3x\ln x+\ln x}{e^x+x\sin x} = \underbrace{\frac{x^3}{e^x}}_{\rightarrow 0} \times \underbrace{\frac{1-\frac{3\ln x}{x^2}+\frac{\ln x}{x^3}}{1+\frac{x}{e^x}\sin x}}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Proposition I.29 (Limites classiques).

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 ;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration. Dans les deux cas, on reconnaît des limites de taux d'accroissement :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{(1+x) - 1} = \ln'(1) = 1 ;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \exp'(0) = 1.$$

□

Proposition I.30 (Inégalités classiques). *Les fonctions $\ln$ et $\exp$ vérifient que :*

1. si $x > -1$, alors $\ln(1+x) \leq x$;
2. si $x \in \mathbb{R}$, alors $e^x \geq 1+x$.

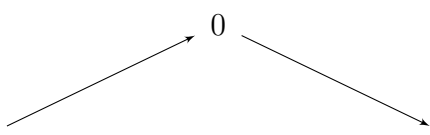
De plus, les inégalités précédentes sont des égalités si, et seulement si, $x = 0$.

Démonstration.

1. posons φ définie sur $] -1; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \ln(1+x) - x$.

Alors φ est dérivable avec : $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$.

D'où les variations :

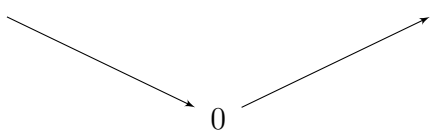
x	-1	0	$+\infty$
φ'	$+$	0	$-$
φ			

Donc φ est négative sur $]1; +\infty[$, ce qui donne l'inégalité voulue.

2. posons ψ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\psi(x) = e^x - x - 1$.

Alors ψ est dérivable avec : $\psi'(x) = e^x - 1$.

D'où les variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ψ'	$-$	0	$+$
ψ			

Donc ψ est positive sur $\mathbb{R}$, ce qui donne l'inégalité voulue.

□

Remarques I.31.

1. Par croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut déduire la première inégalité de la seconde en composant par la fonction $\ln$.
2. En combinant les deux derniers résultats, on peut raffiner les limites précédentes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1^- = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x}.$$

I.5 Puissances de fonctions par des fonctions

Proposition I.32. Si u, v sont des fonctions définies sur un intervalle I et dérivables sur I , avec u à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors la fonction $f : x \mapsto u(x)^{v(x)}$ est bien définie sur I . De plus, elle est dérivable sur I , de dérivée $x \mapsto \ln(u(x))v'(x)u(x)^{v(x)} + v(x)u'(x)u(x)^{v(x)-1}$.

Démonstration. Comme u est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, alors f est bien définie.

Pour analyser en détail f , on préfère écrire : $f : x \mapsto \exp(v(x) \cdot \ln(u(x)))$.

Par composition et produits, la fonction f est dérivable sur I , et sa dérivée en $x \in I$ est donnée par :

$$f'(x) = (v \cdot \ln(u))'(x) \cdot \exp(v(x)\ln(u(x))) = (v \cdot \ln(u))'(x) \cdot u(x)^{v(x)}$$

qui donne bien la formule précédente en constatant que :

$$(v \cdot \ln(u))'(x) = \ln(u(x))v'(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)}.$$

□

Remarque I.33. Cette formule n'est pas à connaître : elle est là pour illustrer comment étudier ce type de fonctions, ce qui se fait systématiquement par passage par l'écriture exponentielle d'une puissance.

Exemple I.34. Étudions la fonction $f : x \mapsto x^x$.

À cause de la puissance quelconque qui apparaît, f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, elle est dérivable. On calcule sa dérivée en écrivant que $x^x = \exp(x\ln(x))$, ce qui donne pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = (\ln(x) + 1)x^x.$$

Par stricte croissance de $\ln$, on déduit le signe de f' sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc les variations de f .

Étudions les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}_+^*$:

— en 0 : par croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x\ln(x) = 0$; et donc par composition de limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(x\ln(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 1$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$; ceci nous dit que f est prolongeable par continuité en 0 ; on notera g son prolongement, qui est donc défini sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

— en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\ln(x) = +\infty$ (par calcul direct), et donc par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x\ln(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On déduit donc le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f'		— 0 +	
f	1	$\frac{1}{e}$	$+\infty$

Étudions plus en détail f en 0 et en $+\infty$:

- en 0 : on a déjà le prolongement par continuité ; étudions la dérivabilité du prolongement. Pour $x > 0$, le taux d'accroissement de g entre 0 et x est donné par :

$$\tau_0(x) = \frac{x^x - 1}{x} = \frac{\exp(x \ln(x)) - 1}{x} = \frac{\exp(x \ln(x)) - 1}{x \ln(x)} \cdot \ln(x)$$

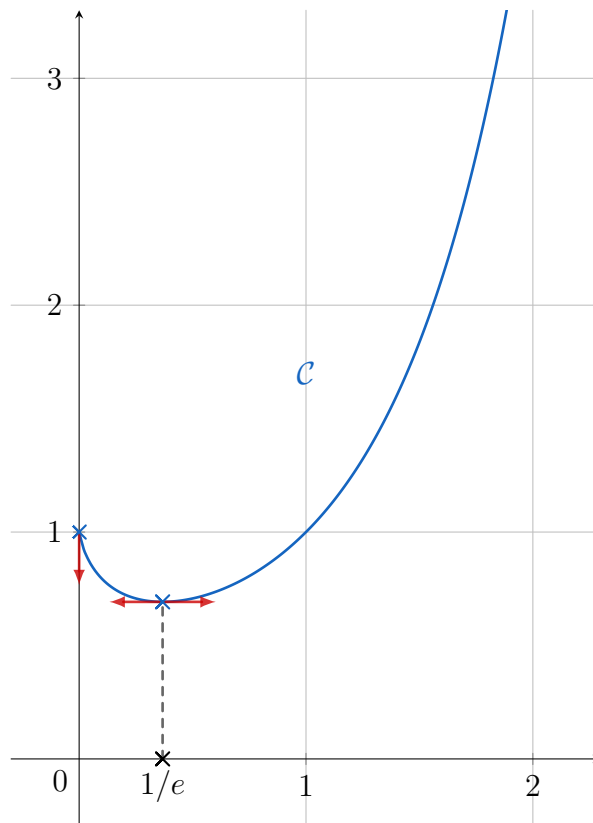
et par limite classique et produit de limites, on a ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0} \tau_0(x) = -\infty$. Donc g n'est pas dérivable en 0, mais sa courbe y admet une tangente verticale.

- en $+\infty$: pour $x > 0$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = x^{x-1} = \exp((x-1)\ln(x))$$

et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (par calcul direct). Donc la courbe de f admet en $+\infty$ une branche parabolique d'axe vertical.

On a donc le tracé suivant :



II Les fonctions circulaires

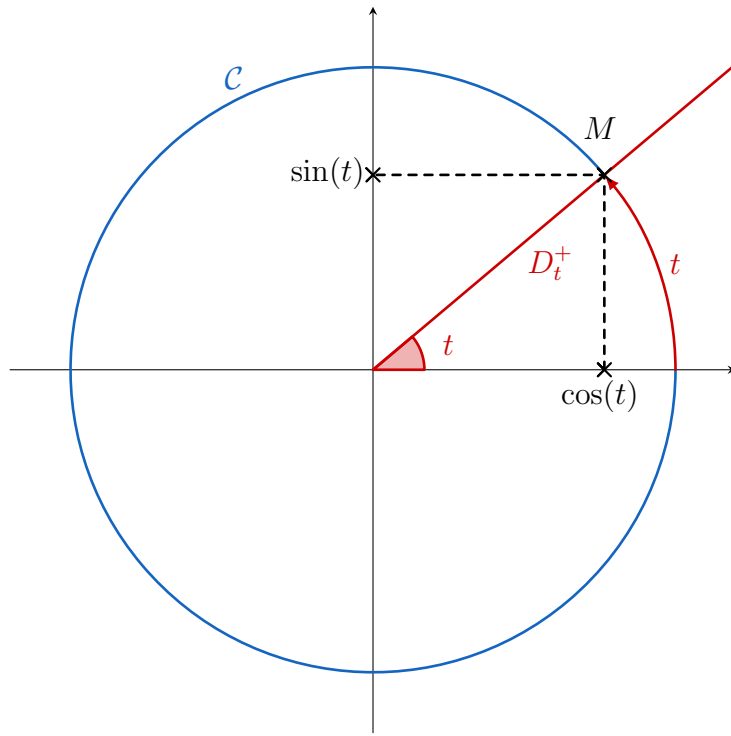
II.1 Le cercle trigonométrique

On se place dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition II.1. Le **cercle trigonométrique** est le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 : $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$.

Définition II.2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère la demi-droite D_t^+ issue de O faisant un angle t avec l'axe des abscisses. Elle coupe $\mathcal{C}$ en un unique point M .

On appelle **cosinus** de t , noté $\cos(t)$, l'abscisse de M . On appelle **sinus** de t , noté $\sin(t)$, l'ordonnée de M .



Définition II.3. Si $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$, on définit sa **tangente**, notée $\tan(t)$, comme : $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$.

Proposition II.4 (Paramétrisation du cercle trigonométrique). Si $M(x, y)$ est un point du cercle, il existe un réel t tel que $(x, y) = (\cos(t), \sin(t))$. Ce réel est unique à 2π près.

Démonstration. La demi-droite $[OM)$ fournit l'existence, en prenant pour t l'angle qu'elle fait avec l'axe des abscisses.

L'unicité provient de la définition même de π : deux valeurs de t doivent différer d'un nombre de tours entier du cercle, donc d'un multiple entier de 2π . $\square$

Remarque II.5. En pratique, on utilisera la paramétrisation pour dire qu'il existe un unique t dans $] -\pi; \pi[$ ou dans $[0; 2\pi[$.

Corollaire II.6. Si $r > 0$, et que $M(x, y)$ est un point du cercle de centre O de rayon r , il existe un unique réel t (à 2π près) tel que : $(x, y) = (r\cos(t), r\sin(t))$.

Démonstration. Pour un tel (x, y) , on a : $x^2 + y^2 = r^2$.

Donc, en posant $(x', y') = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right)$, on a : $x'^2 + y'^2 = 1$.

Donc $(x', y') = (\cos(t), \sin(t))$, puis $(x, y) = (r\cos(t), r\sin(t))$. $\square$

Proposition II.7. Si $t \in \mathbb{R}$, alors :

1. $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$;
2. $\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$ et $\sin(t + 2\pi) = \sin(t)$;
3. $\cos(-t) = \cos(t)$ et $\sin(-t) = -\sin(t)$;
4. $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$;
5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$;
6. si $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$: $\tan(t + \pi) = \tan(t)$.

Démonstration. 1. théorème de Pythagore ;

2. définition de π ;
3. la symétrie d'axe horizontal transforme D_t^+ en D_{-t}^+ ; donc envoie $(x, y) = (\cos(t), \sin(t))$ sur $(x, -y) = (\cos(-t), \sin(-t))$;
4. pareil avec la symétrie d'axe vertical ;
5. pareil avec la symétrie d'axe oblique ;
6. découle de 3. et 4..

□

Proposition II.8. *Les fonctions cos et sin sont 2π -périodiques.*

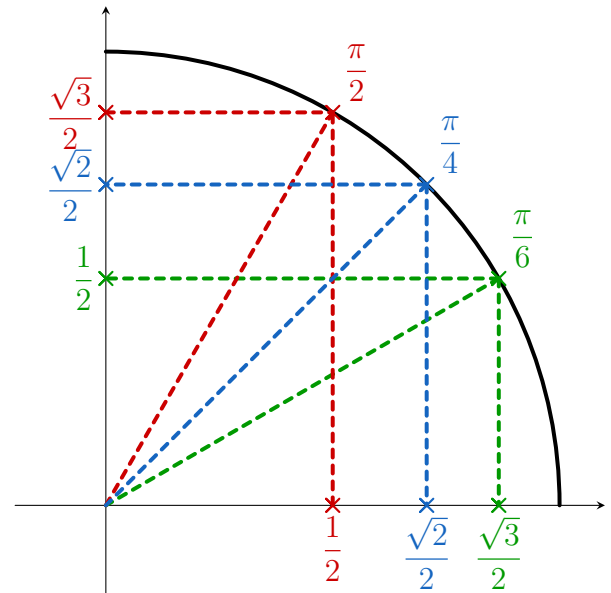
De plus, cos est paire, sin est impaire et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x) \text{ et } \sin(x + \pi) = -\sin(x).$$

Proposition II.9. *La fonction tan est π -périodique et impaire.*

Proposition II.10 (Valeurs remarquables). *On a le tableau de valeurs :*

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(t)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	<i>pas défini</i>



Démonstration. Les valeurs pour 0 ou $\frac{\pi}{2}$ sont immédiates. Pour les autres valeurs, on utilise le théorème de Pythagore dans des triangles particuliers (isocèle-rectangle ou équilatéral). □

Proposition II.11. *Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors :*

1. $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
2. $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
3. $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$;
4. $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$;
5. si $a, b, a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$: $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$;
6. si $a, b, a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$: $\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$.

Démonstration. On se contente de montrer la deuxième (les autres en découlent).

On pose $M, N \in \mathcal{C}$ avec $M(x, y) = (\cos(a), \sin(a))$ et $N(x', y') = (\cos(b), \sin(b))$.

Alors : $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}) = (a - b)$.

Donc : $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \cdot \cos(a - b) = \cos(a - b)$.

Mais on a aussi : $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} = xx' + yy' = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

Ce qui donne bien l'égalité cherchée. □

Corollaire II.12. Pour tout $a \in \mathbb{R}$:

1. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$;
2. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$;
3. si $a, 2a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$: $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$.

Et ainsi :

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \text{ et } \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}.$$

Corollaire II.13. Si $a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on pose $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$. Alors :

1. $\sin(a) = \frac{2t}{1+t^2}$;
2. $\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$;
3. $\tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}$ (si $a \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$)

Démonstration. Montrons par exemple la première. À l'aide du résultat précédent, on trouve :

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\tan(a/2)}{1+\tan^2(a/2)} = 2\frac{\sin(a/2)}{\cos(a/2)}\cos^2(a/2) = 2\sin(a/2)\cos(a/2) = \sin(a)$$

ce qui donne bien le résultat cherché.

Les autres égalités se montrent de même. □

Corollaire II.14 (Formules de développement). Si $a, b \in \mathbb{R}$:

1. $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$;
2. $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$;
3. $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.

Corollaire II.15 (Formules de factorisation). Si $a, b \in \mathbb{R}$:

1. $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$;
2. $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$;
3. $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$;
4. $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

Corollaire II.16 (Factorisation générale). Si $a, b \in \mathbb{R}$, il existe un réel φ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, a\cos(t) + b\sin(t) = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(t - \phi).$$

Démonstration. Si $a = b = 0$, alors tout réel φ convient.

Sinon, comme $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$, alors il existe φ tel que : $\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Et un tel φ convient d'après les formules d'addition. □

Exemple II.17. *Considérons pour $t \in \mathbb{R}$ l'expression :*

$$\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t).$$

On a :

$$\frac{1}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et ainsi on $\varphi = \frac{\pi}{3}$ convient. Ce qui donne finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \cos(t) + \sqrt{3}\sin(t) = 2\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right).$$

Remarques II.18.

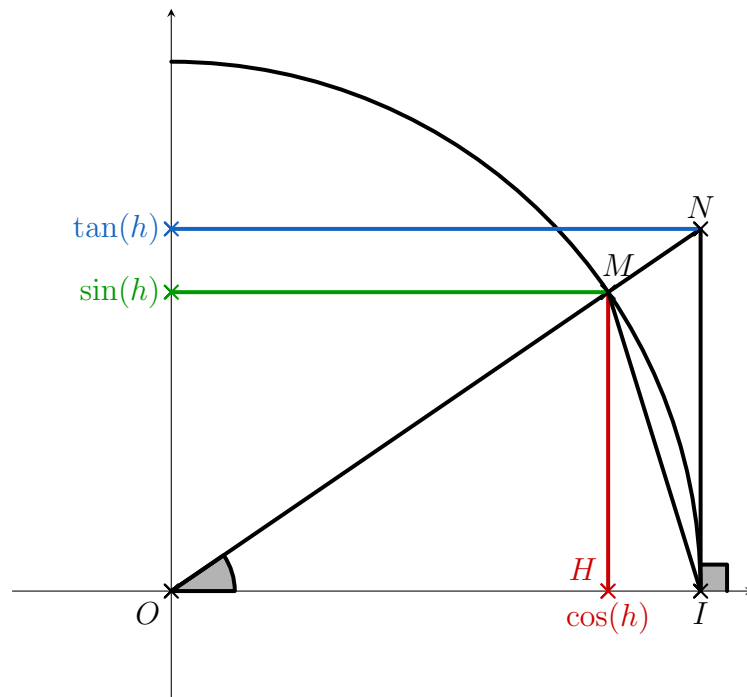
1. En pratique, on commence par regarder $\cos(\varphi)$ (ce qui donne φ au signe près), et $\sin(\varphi)$ permet de lever l'ambiguïté sur le signe.
2. Ce résultat permet de mieux comprendre les valeurs prises par une combinaison linéaire de $\sin$ et $\cos$. Par exemple, dans l'exemple précédent, on voit que l'expression prend toutes les valeurs entre -2 et 2 .

II.2 Propriétés des fonctions circulaires

Lemme II.19. *On a les limites :*

1. $\lim_{t \rightarrow 0} \sin(t) = 0$;
2. $\lim_{t \rightarrow 0} \cos(t) = 1$;
3. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$.

Démonstration. Soit $h \in]0; \frac{\pi}{2}[$:



On a les aires suivantes :

- le triangle OMI est d'aire $\frac{\sin(h)}{2}$;
- le secteur angulaire entre $[OI]$ et $[OM]$ est d'aire $\frac{h}{2}$;
- le triangle ONI est d'aire $\frac{\tan(h)}{2}$.

Et donc :

$$0 < \sin(h) \leq h \leq \tan(h).$$

1. par encadrement : on trouve $\lim_{h \rightarrow 0^+} \sin(h) = 0$;

Par parité, on a : $\lim_{h \rightarrow 0^-} \sin(h) = 0$.

Donc : $\lim_{t \rightarrow 0} \sin(t) = 0$

2. D'où : $\lim_{t \rightarrow 0} \cos(t) = \lim_{t \rightarrow 0} (1 - 2\sin^2(\frac{t}{2})) = 1$;

3. En divisant par $\sin(h)$:

$$1 \leq \frac{h}{\sin(h)} \leq \frac{1}{\cos(h)}$$

d'où par encadrement : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin(h)}{h} = 1$.

Et par parité : $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin(h)}{h} = 1$.

Donc : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$.

□

Proposition II.20. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|\sin(x)| \leq |x|$.

Démonstration. On procède par disjonction de cas :

- si $x = 0$: ok ;
- si $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$: c'est fait dans la démonstration précédente ;
- si $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$: c'est vrai par parité ;
- si $x \notin]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$: alors $|x| \geq \frac{\pi}{2} > 1 \geq |\sin(x)|$.

□

Théorème II.21. Les fonction $\sin$ et $\cos$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

Démonstration. On utilise le lemme et les formules d'addition.

Continuité : Si $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|\sin(x) - \sin(y)| = \left| 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \right| \leq |x-y|$$

donc $\lim_{y \rightarrow x} (\sin(x) - \sin(y)) = 0$: $\sin$ est continue en x , donc sur $\mathbb{R}$.

Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, alors $\cos$ est la composée des fonctions continues $\sin$ et $x \mapsto x + \frac{\pi}{2}$, donc $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité : Si $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq y$:

$$\frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\frac{x-y}{2}}$$

et :

— par continuité de $\cos$: $\lim_{y \rightarrow x} \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = \cos(x)$;

— par le lemme : $\lim_{y \rightarrow x} \frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\frac{x-y}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$.

Donc : $\lim_{y \rightarrow x} \frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} = \cos(x)$.

Donc $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec : $\sin' = \cos$.

Par dérivée d'une composée, $\cos$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos'(x) = 1 \times \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

donc $\cos' = -\sin$. □

Corollaire II.22. Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. On prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont n -fois dérivables avec :

$$\cos^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \text{ et } \sin^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

□

Corollaire II.23. La fonction $\tan$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, avec : $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.