

Feuille d'exercices n°6 : Les complexes

Exercice 1 [Formes algébriques]

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1. $(3 + 2i)(1 - i)$;
3. $\frac{1}{2-i\sqrt{3}}$;
5. $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$;
2. $(1 - i)^3$;
4. $\frac{4+3i}{-2+7i}$;
6. $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$.

Exercice 2 [Formes exponentielles]

Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle, où $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

1. $1 + e^{i\theta}$;
3. $\frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$;
4. $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$;
2. $1 - e^{i\theta}$;
5. $1 - i \tan(\theta)$.

Exercice 3 [Un calcul de dérivées]

Linéariser $\sin^3(x)$ et en déduire les dérivées successives de la fonction $x \mapsto \sin^3(x)$.

Exercice 4 [Système d'équation trigonométrique]

Résoudre les systèmes suivants d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$:

1.
$$\begin{cases} 1 + \cos x + \cos y = 0 \\ \sin x + \sin y = 0 \end{cases} ;$$
2.
$$\begin{cases} \cos a + \cos x + \cos y = 0 \\ \sin a + \sin x + \sin y = 0 \end{cases} \quad (\text{où } a \in \mathbb{R}).$$

Exercice 5 [Puissances des racines de l'unité]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ les racines n -èmes de l'unité. Calculer, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, la quantité $S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^p$ (on pourra distinguer selon que p est ou non un multiple de n).

Exercice 6 [Deux sommes classiques]

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

Exercice 7 [Deux sommes trigonométriques]

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$. Montrer que : $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0$.

Exercice 8 [Autres sommes trigonométriques]

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

1. $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$;
2. $\sum_{k=0}^n \sin^2(k\theta)$;
3. $\sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta)$.

Exercice 9 [Demi-plan supérieur et disque unité]

On note $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Et on définit l'application f sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ par : $f : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de P sur D .
2. Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}$ réalise une bijection sur $\mathbb{U} \setminus \{1\}$.

Exercice 10 [Complexes de module 1 et réels]

Soient z, u de complexes de module 1 tels que $zu \neq -1$. Montrer que $\frac{z+u}{1+zu}$ est un réel, et le calculer à l'aide de α et β , arguments respectifs de z et u .

Réciproquement, soient z, u des complexes avec $z \notin \mathbb{R}$ de module 1 et $zu \neq -1$. Montrer que, si $\frac{z+u}{1+zu}$ est réel, alors $|u| = 1$.

Exercice 11 [Un polynôme de degré 4]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$.

Exercice 12 [Une équation polynomiale de degré n]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $1 + 2z + 2z^2 + \dots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

Exercice 13 [Systèmes somme-produit]

Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}$:

1. $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 5 \end{cases} ;$
3. $\begin{cases} x + y = 2\cos(\theta) \\ xy = 1 \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R}) ;$
5. $\begin{cases} e^x e^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases} .$
2. $\begin{cases} x + y = 3 - i \\ xy = 4 - 3i \end{cases} ;$
4. $\begin{cases} x + y = 7 \\ \ln x + \ln y = 1 \end{cases} ;$

Exercice 14 [Identité du parallélogramme]

Montrer l'identité du parallélogramme : dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs de ses côtés.

Exercice 15 [Un parallélogramme ?]

Montrer que, pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a : $|z_1| + |z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$, et étudier le cas d'égalité. Comment interpréter géométriquement ce résultat ?

Exercice 16 [Équations géométriques]

Déterminer les points du plan d'affixe z tels que :

1. $1, z$ et z^2 sont alignés ;
3. z, z^2 et z^4 sont alignés ;
2. $1, z$ et z^2 sont les sommets d'un triangle rectangle (en précisant le point en lequel il est rectangle) ;
4. $1, z$ et z^2 sont les sommets d'un triangle équilatéral (en précisant s'il est direct ou non)