

Feuille d'exercices n°5 : Les fonctions usuelles

Exercice 1 [Équations autour des logarithmes et puissances]

Résoudre les équations suivantes :

$$1. \quad 2^{3x+1} - 2^{2x} - 2^{x+3} + 4 = 0 ;$$

$$5. \quad x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x} ;$$

$$2. \quad \ln x - \frac{1}{\ln x} = \frac{3}{2} ;$$

$$6. \quad 2^x + 3^x = 5 ;$$

$$3. \quad 2^{x^2} = 3^{x^3} ;$$

$$7. \quad \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2 ;$$

$$4. \quad 2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2} ;$$

$$8. \quad \pi^{\sin^2(x)} = \cos(\pi x).$$

Exercice 2 [Système et étude de fonction]

Pour $a > 0$, étudier les variations de la fonction : $x \mapsto x + a + \frac{1}{ax}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

En déduire les solutions du système :
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ e^x + e^y + e^z = 3 \end{cases}.$$

Exercice 3 [Une inégalité]

Montrer que, si $x \in]0; 1[$, alors : $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 4 [Utilisation d'une inégalité classique]

Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$: $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e \leq (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.

Exercice 5 [Limites et croissances comparées]

Calculer les limites suivantes en utilisant les limites classiques :

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \sqrt{|\ln(x)|} ;$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} ;$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} - \frac{x}{2} \right] ;$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x)} ;$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x ;$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} \right]^{\frac{1}{x}} ;$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x)^x ;$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}} ;$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(1+x)]^x ;$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1} \right]^x.$$

Exercice 6 [Étude de fonctions]

Faire l'étude complète de la fonction $f : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ en étudiant bien les limites aux bornes de son ensemble de définition (et les prolongement éventuels).

Exercice 7 [Équations trigonométriques]

Montrer les équivalences suivantes entre équations trigonométriques, et les résoudre :

$$1. \quad \sin 9x + \sin 5x + 2\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \left[\cos(2x) = 0 \text{ ou } \sin(7x) = \frac{1}{2} \right] ;$$

$$2. \quad \sin 2x + \sin 6x = \sin 4x \Leftrightarrow \left[\sin(4x) = 0 \text{ ou } \cos(2x) = \frac{1}{2} \right] ;$$

$$3. \quad \cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\cos(3x) = 0 \text{ ou } \cos(2x) = -\frac{1}{2} \right] ;$$

$$4. \quad \sin x + \cos x - \frac{\sin 2x}{\sqrt{2} + 1} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow [\sin(2x) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)] ;$$

5. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 \Leftrightarrow [\sin^2(x), \cos^2(x) = 1 \text{ ou } 0]$;
6. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 \Leftrightarrow [\sin(x), \cos(x) = 1 \text{ ou } 0]$;
7. $\tan 2x = 3 \tan x \Leftrightarrow [\tan(x) = 0 \text{ ou } \tan^2(x) = \frac{1}{3}]$;
8. $\frac{\tan x + \tan 4x}{1 - \tan x \tan 4x} = \frac{1 - \tan^2 x}{2 \tan x} \Leftrightarrow [\cos(7x) = 0 \text{ et } \sin^2(x) \neq 1]$.

Exercice 8 [Un calcul de sinus]

On se propose de calculer $\sin(\frac{\pi}{10})$.

1. Déterminer les solutions de l'équation : $\sin(2x) = \cos(3x)$.
2. Montrer que l'on a : $\sin(2x) - \cos(3x) = \cos(x) \cdot [4\sin^2(x) + 2\sin(x) - 1]$.
3. En déduire la valeur de $\sin(\frac{\pi}{10})$.

Exercice 9 [Factorisation d'expressions trigonométriques]

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Factoriser les expressions suivantes :

1. $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$;
2. $1 - \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$.

Exercice 10 [Réciproques de fonctions circulaires]

Simplifier les expressions suivantes, en précisant l'intervalle auquel x appartient :

1. $\tan(\arcsin(x))$;
3. $\cos(\arcsin(x))$;
5. $\tan(2\arcsin(x))$;
2. $\sin(\arccos(x))$;
4. $\cos(2\arccos(x))$;
6. $\sin(2\arccos(x))$.

Exercice 11 [Quelques égalités] Préciser sur quel ensemble les égalités suivantes ont un sens et les démontrer (on pourra chercher à dériver les expressions) :

1. $\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;
3. $\arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$;
2. $\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$;
4. $\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(x)$.

Exercice 12 [Inégalités classiques hyperboliques]

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer les inégalités suivantes, en précisant les cas d'égalité :

1. $\text{sh}(x) \geq x$;
2. $\text{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 13 [Équations circulaires hyperboliques]

Résoudre les équations suivantes :

1. $\text{sh}(x) = \sqrt{3}$
3. $3\text{ch}(2x) + 4\text{ch}(x) = 7$
5. $16\text{sh}(x)\text{ch}(x) = 15$
2. $\text{ch}(x) = \frac{5}{3}$
4. $\text{sh}(2x) = \text{ch}(x)$
6. $\text{sh}(x) + \frac{2}{\text{sh}(x)} = 3$

Exercice 14 [Fonctions circulaires et hyperboliques]

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\arctan(\text{sh } x)| = \arccos\left(\frac{1}{\text{ch } x}\right)$.