

Feuille d'exercices n°4 : Sommes, produits et systèmes

Exercice 1 [Premiers exemples de sommes]

Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=2}^n \frac{5^{3k-1}}{3^{2k+2}} ; \quad 2. \sum_{k=0}^n \frac{7^k}{5^{n-k}} ; \quad 3. \sum_{l=1}^n \frac{3^{l+2}}{2^{2l+1}} - \frac{1}{4}(-3)^l ; \quad 4. \sum_{k=0}^{2n+1} x(1-x^2)^{k+1}.$$

Exercice 2 [Premiers exemples de produits]

Calculer les produits suivantes :

$$1. \prod_{k=1}^n 3k ; \quad 3. \prod_{k=0}^n 2^{2^k} ; \quad 5. \prod_{k=1}^n \exp(k^2) ;$$

$$2. \prod_{k=2}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right) ; \quad 4. \prod_{k=1}^n (4k^2 - 1) ; \quad 6. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Exercice 3 [Simplification d'une somme]

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\sum_{k=0}^n \frac{2^k}{x^{2^k} + 1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}} - 1}.$

Exercice 4 [Simplification d'un produit]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier le produit suivant : $\prod_{k=1}^n \frac{2k+3}{2k-1}.$

Exercice 5 [Utilisation des sommes classiques]

En utilisant les valeurs de $\sum_{k=1}^n k$ et de $\sum_{k=1}^n k^2$, calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1. \sum_{k=1}^n k(k+1) ; \quad 2. 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \cdots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1.$$

Exercice 6 [Groupement dans une somme]

En regroupant habilement les termes, calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes suivantes (on pourra d'abord traiter le cas où n est pair) :

$$1. \sum_{k=1}^n (-1)^k k ; \quad 2. \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 ; \quad 3. \sum_{k=1}^n (-1)^k k^3.$$

Exercice 7 [Sommes télescopiques]

En faisant apparaître des télescopes, calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} ; \quad 2. \sum_{k=1}^n k \cdot k! ; \quad 3. \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} ; \quad 4. \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Exercice 8 [Un autre télescope]

1. Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$

2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$

Exercice 9 [Sommes de coefficients binomiaux 1]

Simplifier les expressions suivantes :

$$1. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}; \quad 2. \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}; \quad 3. \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}; \quad 4. \sum_{k=p}^n \binom{k}{p}.$$

Exercice 10 [Sommes de coefficients binomiaux 2]

Simplifier les expressions suivantes :

$$1. \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1}; \quad 2. \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} 2^{n-3k} (-1)^k \text{ (avec } n \geq 2 \text{)};$$

Exercice 11 [Égalité de produits]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'égalité : $\prod_{k=1}^n (4k-2) = \prod_{k=1}^n (n+k)$, et donner une expression simple de leur valeur.

Exercice 12 [Résolution de systèmes]

À l'aide du pivot de Gauss, déterminer les solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 1 \\ 3x + 4y + 4z = 1 \\ x - 2y - 4z = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 20x_2 + 6x_3 + x_4 = 2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ 6x_1 - 12x_2 - 12x_3 + 16x_4 = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x - 6y + z = 7 \\ x + 2y + z = 5 \\ -2x + 5y - 2z = -1 \end{cases}.$$

Exercice 13 [Systèmes à paramètre]

Discuter, suivant la valeur de m , des solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} mx + (1-m)y + (1-m)z = m^2 \\ mx + (1+m)y + (1+m)z = m - m^2 \\ x + y + z = 1 - m \end{cases}$$

Exercice 14 [Un grand système]

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 3x_n = 1 \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots = \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 1 \end{cases}$$