

Feuille d'exercices n°2 : Rappels et compléments de calcul

Exercice 1 [Fonction additives sur les rationnels]

1. si $f : x \mapsto a$, alors : $f(x + y) = a = f(x) + f(y) = 2a$ donc $a = 0$. Et $f : x \mapsto 0$ convient bien.
2. $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$
 $0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$ donc $f(-x) = -f(x)$.
3. Par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$. Par parité pour $n \in \mathbb{Z}$.
4. $a = f(1) = f(q \cdot 1/q) = qf(1/q)$ donc $f(1/q) = \frac{1}{q} \cdot a$
 $f(p/q) = f(p \cdot 1/q) = pf(1/q) = \frac{p}{q} \cdot a$.

Exercice 2 [Quelques inégalités]

1. tout ramener à gauche et reconnaître un carré ;
2. avec 1 on a : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (pareil pour les deux autres) et on multiplie (tout est positif)
3. avec 1 encore : $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$ puis on somme en échangeant les rôles de a, b, c .
4. constater avec 1 que : $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2\frac{a}{c}$ et échanger rôles

Exercice 3 [Manipulation de valeurs absolues]

Pour les 1,2,3 : comme on a toujours des quantités positives, on peut mettre au carré en préservant les équivalences.

Pour 4 : se restreindre à $x \geq 2$ et voir que c'est impossible.

Exercice 4 [Manipulation de racines carrées]

Analyse-synthèse en mettant au carré.

Ou restreindre le domaine.

Exercice 5 [Équation et inégalité]

1. Somme de carrés (donc positifs) : nulle ssi $a + bx = 0 = c + dx$ donc il y a une solution ssi $ad = bc$ et cette solution est $-a/b = -c/d$.
2. on développe le carré : si pas de solution le discriminant est strictement négatif, et sinon il est nul.
 $\Delta = 4((ab + cd)^2 - (b^2 + d^2)(a^2 + c^2)) \leq 0$ avec égalité ssi $ad = bc$.

Exercice 6 [Simplification de parties entières]

1. partir de $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. On déduit : $n \lfloor x \rfloor \leq nx < n \lfloor x \rfloor + n$ donc $n \lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor < n \lfloor x \rfloor + n$ donc (maximalité) $\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1$ d'où l'égalité par définition
2. poser $x/2 = \lfloor x/2 \rfloor + r$ pour $r \in [0; 1[$ et distinguer selon $r < 1/2$ ou $r \geq 1/2$

Exercice 7 [Partie entière et opposé]

Par disjonction de cas, comme pour $x \notin \mathbb{Z}$: $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$ (et pareil pour $-x$)

Exercice 8 [Parties entières et inégalités]

1. Direct par maximalité. Réciproque fausse ($x = 3/4$ et $y = 1/2$).
2. Inégalité entre entiers : $< k$ se transforme en $\leq k - 1$.

Exercice 9 [Calcul d'une partie entière]

Mettre au carré, simplifier, mettre au carré, simplifier, etc.

Exercice 10 [Partie entière et répartition des carrés]

1. 1 si m impair et 0 sinon.
2. Par l'absurde : si un tel m existait, on aurait $4n + 1 < m^2 \leq 4n + 3$. Contradiction avec la question 1.
3. Il suffit de voir que $\sqrt{4n+1} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leq \sqrt{4n+3}$ ce qui se montre en mettant au carré (légitime comme tout est ≥ 0).