

Feuille d'exercices n°2 : Rappels et compléments de calcul

Exercice 1 [Fonction additives sur les rationnels]

On considère $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ telle que : $\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. Étudier les fonctions constantes possibles pour f .
2. Calculer $f(0)$, et montrer que, si $x \in \mathbb{Q}$, alors : $f(-x) = -f(x)$.
3. Montrer que, si $x \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors $f(nx) = nf(x)$.
4. En déduire que, si on pose $a = f(1)$, alors : $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = ax$.

Exercice 2 [Quelques inégalités]

Montrer les inégalités suivantes :

1. si $a, b \in \mathbb{R} : (a+b)^2 \geq 4ab$;
2. si $a, b, c \in \mathbb{R}_+ : (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$;
3. si $a, b, c \in \mathbb{R}_+^* : \frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c} \leq \frac{a+b+c}{2}$;
4. si $a, b, c \in \mathbb{R}_+^* : \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$.

Exercice 3 [Manipulation de valeurs absolues]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|2x-1| = |x+4|$;
2. $|x-1| \leq |x+3|$;
3. $|3x| \leq |2x+3|$;
4. $|x+5| = x-2$.

Exercice 4 [Manipulation de racines carrées]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x-3} \leq \sqrt{2x-5}$;
2. $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = 2$;
3. $x - 3\sqrt{x} - 10 = 0$;
4. $\sqrt{x-4\sqrt{x}+4} \geq 3$.

Exercice 5 [Équation et inégalité] Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Étudier les solutions de l'équation en x : $(a+bx)^2 + (c+dx)^2 = 0$.
2. En déduire que $|ab+cd| \leq \sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}$ et donner les cas d'égalité.

Exercice 6 [Simplification de parties entières]

Montrer les égalités suivantes :

1. si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$: $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$;
2. si $x \in \mathbb{R}$: $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 7 [Partie entière et opposé]

Montrer que : $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 8 [Parties entières et inégalités]

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que, si $x \leq y$, alors $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 9 [Calcul d'une partie entière]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $x = \sqrt{n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + \sqrt{64n^2 + 1}}}}$. Montrer que $\lfloor x \rfloor = n$.

Exercice 10 [Partie entière et répartition des carrés]

Soit $n \in \mathbb{N}$:

1. Rappeler, pour $m \in \mathbb{N}$, les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de m^2 par 4.
2. En déduire qu'il n'existe pas d'entiers entre dans l'intervalle $] \sqrt{4n+1}; \sqrt{4n+3}]$.
3. En déduire que : $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+3} \rfloor$.