

DS n°1

I Exercices

Exercice 1 1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 1.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$.

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+1} - 1$.

3. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + (-1)^n$$

Montrer qu'il existe deux réels a, b (que l'on donnera explicitement) tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ est pair} \\ b & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Exercice 2 1. Rappeler la définition de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels.

2. On considère l'assertion suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, (a \in \mathbb{Q} \text{ et } b \in \mathbb{Q}) \Rightarrow ((a + b) \in \mathbb{Q} \text{ et } (a \times b) \in \mathbb{Q}).$$

Écrire en français (et le plus simplement possible) cette assertion, et la prouver.

3. En déduire que la différence d'un irrationnel et d'un rationnel est un irrationnel.

4. Que penser du produit d'un rationnel et d'un irrationnel ?

Exercice 3 Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, en précisant pour chacune d'elle le cas d'égalité :

1. $\sqrt{2-x} \geq x$

2. $|-3x+4| + |x-5| \leq 10$.

Exercice 4 Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on définit le **maximum** et le **minimum** de a et b , notés respectivement $\max(a, b)$ et $\min(a, b)$, comme :

$$\max(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \\ b & \text{si } a < b \end{cases} \text{ et } \min(a, b) = \begin{cases} b & \text{si } a \geq b \\ a & \text{si } a < b \end{cases}.$$

On pose $f : x \mapsto \max(x-2, 3x+2)$.

1. Résoudre l'inéquation $x-2 \geq 3x+2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, que l'on donnera explicitement, tel que f est définie par :

$$\forall x \in]-\infty; a], f(x) = x - 2 \text{ et } \forall x \in]a; +\infty[, f(x) = 3x + 2.$$

3. On fixe $y \in \mathbb{R}$: résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Indication : on pourra la résoudre séparément sur $] - \infty; a]$ et sur $]a; +\infty[$.

4. En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et donner l'expression de sa bijection réciproque.

5. Montrer que f^{-1} est la fonction $y \mapsto \min\left(y + 2, \frac{y - 2}{3}\right)$.

6. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$ et $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$.

7. À l'aide des questions précédentes, donner des expressions de f et de f^{-1} qui ne fassent pas intervenir de disjonction de cas ou les fonctions min et max.

Exercice 5 1. Rappeler, pour $x \in \mathbb{R}$, la définition de la partie entière de x .

2. Résoudre l'équation $[x] = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3. On fixe pour cette question $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Dire parmi les assertions suivantes celles qui sont vraie ou fausse, et le prouver :

(a) $[x] \leq n \Leftrightarrow x \leq n$

(b) $[x] < n \Leftrightarrow x < n$

(c) $[x] \geq n \Leftrightarrow x \geq n$

(d) $[x] > n \Leftrightarrow x > n$

Exercice 6 Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) \cdot f(y) + f(x + y) = xy.$$

1. Existe-t-il de telles fonctions constantes ?

Pour les questions 2 à 4, on suppose que f est solution au problème.

2. Montrer que $f(0) = 0$ ou -1 .

3. On suppose pour cette question uniquement que $f(0) = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

4. On suppose pour cette question uniquement que $f(0) = -1$.

(a) Montrer que $f(1) = 0$ ou $f(-1) = 0$.

(b) Montrer que, si $f(1) = 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f(t) = t - 1$.

(c) Montrer que, si $f(-1) = 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f(t) = -t - 1$.

5. Conclure.

II Problème

Le but de ce problème est de prouver, de deux manières différentes, l'inégalité suivante :

Inégalité de Nesbitt : si $u, v, w \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

$$\frac{u}{v+w} + \frac{v}{u+w} + \frac{w}{u+v} \geq \frac{3}{2}.$$

Dans toute la suite, on considère fixés u, v, w trois réels strictement positifs.

1. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, sa **racine cubique**, notée $\sqrt[3]{x}$ comme l'unique nombre dont le cube vaut x . On n'utilisera que cette définition pour démontrer toutes les propriétés qui suivent sur la racine cubique. Et à chaque question le résultat pourra être admis dans les questions qui suivent.

(a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} > 0$.

(b) En déduire que la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Indication : on pourra utiliser une disjonction de cas suivant le signe des réels dont on étudie les images, et raisonner par contraposée.

(c) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$ et $\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ (si $x \neq 0$).

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $2xy \leq x^2 + y^2$, et préciser la situation d'égalité.

3. **Inégalité arithmético-harmonique** : Étant donnés $a, b, c > 0$, leur **moyenne arithmétique** est le réel $M(a, b, c) = \frac{a+b+c}{3}$ et leur **moyenne harmonique** est le réel $H(a, b, c) = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$.

(a) Montrer que : $H(a, b, c) = \frac{3abc}{ab+bc+ac}$.

(b) À l'aide de la question 2., montrer que $2abc \leq a^2b + bc^2$.

(c) En déduire que : $9abc \leq (a+b+c)(ab+bc+ac)$.

(d) Déduire des questions précédentes l'inégalité arithmético-harmonique : $H(a, b, c) \leq M(a, b, c)$.

4. **Première preuve de l'inégalité de Nesbitt** : En appliquant l'inégalité arithmético-harmonique à $u+v$, $u+w$ et $v+w$, montrer l'inégalité de Nesbitt.

5. **Inégalité arithmético-géométrique** :

(a) On considère x, y, z trois réels strictement positifs :

i. Montrer que : $\forall y \in [0; 1], y(1-y)^2 \leq \frac{4}{27}$. On pourra utiliser une étude de fonction.

ii. Soit $y \in]0; 1[$. Déterminer le maximum de la fonction f_y définie sur $[0; 1-y]$ par :

$$\forall x \in [0; 1-y], f_y(x) = -yx^2 + y(1-y)x.$$

iii. En déduire que, si x, y, z sont trois réels strictement positifs tels que $x+y+z=1$, alors : $xyz \leq \frac{1}{27}$.

(b) En appliquant l'inégalité précédente à $x = \frac{a}{a+b+c}$, $y = \frac{b}{a+b+c}$ et $z = \frac{c}{a+b+c}$, montrer l'inégalité arithmético-géométrique : $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$.

On commencera par montrer que x, y, z vérifient bien les hypothèses précédentes.

6. **Seconde preuve de l'inégalité de Nesbitt :** En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique deux fois à des nombres bien choisis, montrer que :

$$((u+v) + (v+w) + (u+w)) \left(\frac{1}{u+v} + \frac{1}{v+w} + \frac{1}{u+w} \right) \geq 9$$

et en déduire une nouvelle preuve de l'inégalité de Nesbitt.

7. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u, v, w pour que l'inégalité de Nesbitt soit une égalité.