

DM n°3

Indication de barème :

- exercices sur 34,3,5,9,10
- problème sur 38
- total pour avoir 20/20 : 75

I Exercices**Exercice 1** Proche du cours

1. Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-x} + x^2}{2x - \ln(x)} ; & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{4\ln(x) - 2x + 5} ; \\ \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} ; & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(e^x)}{\ln(x - \sqrt{x})}. \end{array}$$

2. Linéariser $\cos^3(t)\sin^2(t)$. En déduire une primitive de $t \mapsto \cos^3(t)\sin^2(t)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx).$$

4. (a) Déterminer les racines carrées de $-15 - 8i$ et les donner sous forme algébrique.
(b) En déduire les solutions du système d'inconnues $x, y \in \mathbb{C}$ suivant :

$$\begin{cases} x + y &= 3 - 2i \\ xy &= 5 - i \end{cases}.$$

5. Dire pour quelle(s) valeur(s) de x l'expression $\tan(\arccos(x))$ a un sens, et la simplifier.

6. Donner $A \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, 3\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t) = A\cos(t - \varphi).$$

7. Prouver que la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ est bien définie et dérivable sur $] -1; 1[$, et que :

$$\forall x \in] -1; 1[, f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(x).$$

Exercice 2 Croissance d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et que $f \circ f \circ f$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante.

Exercice 3 Dérivées successives

On fixe $a \in \mathbb{R}_+^*$ et on note $f : x \mapsto a^x$. Montrer que f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de $f^{(n)}$.

Indication : on pourra procéder par récurrence, en soignant particulièrement la rédaction.

Exercice 4 Fonction additives sur les rationnels

On considère $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ telle que : $\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x + y) = f(x) + f(y)$.

1. Calculer $f(0)$, et montrer que, si $x \in \mathbb{Q}$, alors : $f(-x) = -f(x)$.
2. Montrer que, si $x \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors $f(nx) = nf(x)$.

Indication : on pourra commencer par prouver le cas où $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que, si on pose $a = f(1)$, alors : $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = ax$.

Exercice 5 Système et étude de fonction

On souhaite résoudre le système suivant : $(S) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ e^x + e^y + e^z = 3 \end{cases}$ d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$.

1. On fixe $a \in \mathbb{R}_+^*$: donner les variations de la fonction $x \mapsto x + a + \frac{1}{ax}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que, pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $b^2 + \frac{2}{b} \geq 3$, avec égalité si, et seulement si, $b = 1$.
3. En déduire les solutions de (S) .

II Problème : Fonction de Lambert

II.1 Une bijection

On considère la fonction $f : x \mapsto x e^x$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f et justifier que f est dérivable sur son domaine de définition.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Calculer la dérivée de la fonction f puis dresser le tableau des variations de f . On fera notamment figurer $f(-1)$ dans le tableau.
4. Tracer le graphe de f .
5. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[-\frac{1}{e}, +\infty[$.

Dans la suite en notant

$$g : \begin{array}{ccc} [-1, +\infty[& \longrightarrow & [-\frac{1}{e}, +\infty[\\ x & \mapsto & x e^x \end{array}$$

on posera $W = g^{-1}$ l'application réciproque de g .

II.2 Fonction de Lambert

6. Déterminer la limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de $\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$.
7. Que vaut $g(1)$? En déduire que $W(e) = 1$. Calculer également $W(0)$ et $W(-\frac{1}{e})$.
8. Dresser le tableau des variations de W sur son domaine de définition (déterminer la limite de W en $+\infty$).
9. Justifier que W est positive sur $[0, +\infty[$.
10. Montrer que W est dérivable sur $] -\frac{1}{e}, +\infty[$ et que pour tout $x \in] -\frac{1}{e}, +\infty[\setminus \{0\}$,

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}.$$

11. Montrer que pour tout $x \in [e, +\infty[$, $W(x) \leq \ln x$. On pourra étudier la différence et utiliser les deux questions précédentes.
12. Montrer que pour tout $x \in [e, +\infty[$, $\ln x - \ln(\ln x) \leq W(x)$.
13. Conclure que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{W(x)}{\ln x} = 1.$$

14. Soit $f : x \mapsto \ln(x) + x$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Exprimer sa bijection réciproque au moyen de la fonction W .

II.3 Applications

15. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^\pi = \pi^x$. On exprimera au besoin les solutions à l'aide de la fonction W .
16. On fixe $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $c \in \mathbb{R}$. Discuter, suivant la valeur de $\Delta = \frac{a}{b} e^{-\frac{c}{b}}$ du nombre de solutions de l'équation $ae^x + bx + c = 0$ et exprimer la plus grande de ces solutions, sous réserve d'existence, à l'aide de la fonction W .