

DM n°1 : corrigé

I Exercices

Exercice 1 1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$:

- pour $n = 0$: on a par hypothèse $u_0 = 1$, ce qui prouve l'initialisation ;
- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 1$. Alors par définition de (u_n) :

$$u_{n+1} = 2u_n - 1 \stackrel{HR}{=} 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

ce qui conclut l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

2. Si $n \leq 0$, on a directement : $2^n > 0$ (par définition de la puissance) et donc $2^n > n$.

Montrons par récurrence le cas où $n \in \mathbb{N}^*$:

- pour $n = 1$: on a $2^n = 2 > 1 = n$ ce qui prouve l'inégalité pour $n = 1$;
- soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^n > n$. Alors :

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \stackrel{HR}{>} 2n = n + 1 + \underbrace{n - 1}_{\geq 0} \geq n + 1$$

et ainsi $2^{n+1} > n + 1$, ce qui prouve l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

3. Montrons le résultat par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$:

- initialisation :
 - si $n = 0$: $u_n = u_0 = 1$ (par hypothèse) et $2^n(1 - n) = 1 \cdot 1 = 1$; ce qui prouve le cas $n = 0$;
 - si $n = 1$: $u_n = u_1 = 0$ (par hypothèse) et $2^n(1 - n)2 \cdot 0 = 0$; ce qui prouve le cas $n = 1$.

Ce qui prouve l'initialisation.

- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = 2^n(1 - n)$ et que $u_{n+1} = 2^{n+1}(1 - (n+1)) = -2^{n+1}n$. Alors :

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \stackrel{HR}{=} -4 \cdot 2^{n+1}n - 4 \cdot 2^n(1 - n) = 2^{n+2}(-2n - 1 + n) = 2^{n+2}(-1 - n) = 2^{n+2}(1 - (n + 1))$$

ce qui prouve l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

Exercice 2 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'assertion A suivante :

$$A : (ab \geq a) \Rightarrow (a \leq 0 \text{ ou } b \geq 1)$$

1. Si ab est supérieur ou égal à a , alors a est inférieur ou égal à 0, ou b est supérieur ou égal à 1..
2. Négation : $(ab \geq a)$ et $(a > 0)$ et $(b < 1)$

Contraposée : $(a > 0 \text{ et } b < 1) \Rightarrow (ab < a)$

3. A est vraie : on le montre par contraposée.

Supposons que $a > 0$ et $b > 1$. Montrons que $ab < a$.

On a $b > 1$. Comme $a > 0$, en multipliant cette inégalité par a , on a : $ab < a$.

Ce qui prouve la contraposée.

Donc A est vraie.

Remarque : on pourrait montrer que la négation de A est fausse, mais on aboutit aux mêmes calculs.

4. La réciproque est : $(a \leq 0 \text{ ou } b \geq 1) \Rightarrow (ab \geq a)$.

Elle est fausse : prenons $b = 4$ et $a = -3$. On a bien $b \geq 1$ ou $a \leq 0$ (on a même les deux).

Mais $ab = -12 < -3 = a$, donc l'inégalité $ab \geq a$ est fausse.

Exercice 3 1. $\left| \frac{x-1}{x+3} \right| \geq 2$: l'expression n'a de sens que pour $x \neq -3$.

Résolution de l'inéquation : Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{x-1}{x+3} \right| \geq 2 &\Leftrightarrow |x-1| \geq 2|x+3| \text{ car } |x+3| > 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq (2x+6)^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \geq (2x+6)^2 - (x-1)^2 = (x+7)(3x+5) \\ &\Leftrightarrow x \in \left[-7; -\frac{5}{3} \right] \\ &\Leftrightarrow x \in [-7; -3[\cup]-3; -\frac{5}{3}] \end{aligned}$$

en reconnaissant le signe d'un polynôme du second degré (de coefficient dominant $3 > 0$, donc positif à l'extérieur de ses racines) et en utilisant que $x \neq -3$.

Ainsi l'inéquation admet pour ensemble solution : $[-7; -3[\cup]-3; -\frac{5}{3}]$.

Remarque : pour x tendant vers $\pm\infty$, le quotient tend vers 1 ce qui est rassurant car les valeurs infinies de x ne sont pas solution.

Cas d'égalité : pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, on trouve de même :

$$\left| \frac{x-1}{x+3} \right| = 2 \Leftrightarrow 0 = (x+7)(3x+5) \Leftrightarrow x = -7 \text{ ou } x = -\frac{5}{3}$$

et comme ces deux valeurs sont possibles, on déduit qu'il y a égalité si, et seulement si, $x = -7$ ou $x = -\frac{5}{3}$.

2. $\sqrt{18-x} + \sqrt{7+x} \geq 7$: l'expression n'a de sens que si $18-x \geq 0$ et si $7+x \geq 0$, c'est-à-dire pour $x \in [-7; 18]$.

Résolution de l'inéquation : Pour $x \in [-7; 18]$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{18-x} + \sqrt{7+x} \leq 7 &\Leftrightarrow (\sqrt{18-x} + \sqrt{7+x})^2 \leq 7^2 \text{ car tout est positif} \\ &\Leftrightarrow (18-x) + (7+x) + 2\sqrt{(18-x)(7+x)} \leq 49 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(18-x)(7+x)} \leq 12 \\ &\Leftrightarrow (18-x)(7+x) \leq 144 \text{ car tout est positif} \\ &\Leftrightarrow -x^2 + 11x - 18 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -(x-2)(x-9) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty; 2] \cup [9; +\infty[\\ &\Leftrightarrow x \in [-7; 2] \cup [9; 18] \end{aligned}$$

en reconnaissant le signe d'un polynôme du second degré (de coefficient dominant $-1 < 0$, donc négatif à l'extérieur de ses racines) et en utilisant que $x \in [-7; 18]$.

Ainsi l'inéquation admet pour ensemble solution : $[-7; 2] \cup [9; 18]$.

Cas d'égalité : pour $x \in [-7; 18]$, on trouve de même :

$$\sqrt{18-x} + \sqrt{7+x} = 7 \Leftrightarrow 0 = -(x-2)(x-9) \leq 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 9$$

et comme ces deux valeurs sont possibles, on déduit qu'il y a égalité si, et seulement si, $x = 2$ ou $x = 9$.

Remarque : dans les deux cas, les cas d'égalités se vérifient facilement à la main.

Exercice 4 On considère les fonctions $f : x \mapsto \frac{x+4}{x-1}$ et $g : x \mapsto x \cdot |x|$.

1. (a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour x dans cet ensemble, on a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-1} = y \Leftrightarrow_{x \neq 1} x+4 = y(x-1) \Leftrightarrow x(1-y) = -y-4$$

et on résout cette dernière équation par disjonction de cas :

- si $y = 1$: alors l'équation devient $0 = -5$, qui n'a pas de solution.
- si $y \neq 1$: alors on peut diviser par $1-y$ et on obtient :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{-y-4}{1-y} = \frac{y+4}{y-1}$$

et l'équation admet pour unique solution $\frac{y+4}{y-1} = f(y)$.

(b) On déduit ainsi que :

- si $y = 1$: alors y ne possède aucun antécédent par f ;
- si $y \neq 1$: alors $f(y)$ est l'unique antécédent de y (dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$).

Et donc, avec $I = J = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, la fonction f réalise bien une bijection de I dans J , avec $f^{-1} = f$ (c'est joli comme coïncidence, donc c'est bien de le remarquer).

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(x) = y \Leftrightarrow x \cdot |x| = y$$

qu'on résout séparément sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$:

- si $x \in \mathbb{R}_+$: $g(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y$. Cette équation n'admet pas de solution si $y < 0$, et admet comme unique solution dans $\mathbb{R}_+$ le réel $\sqrt{y}$ sinon ;
- si $x \in \mathbb{R}_-$: $g(x) = y \Leftrightarrow x^2 = -y$. Cette équation n'admet pas de solution si $y > 0$, et admet comme unique solution dans $\mathbb{R}_-$ le réel $-\sqrt{-y}$ sinon.

En particulier, peu importe la valeur de $y \in \mathbb{R}$, il possède un unique antécédent par g , à savoir $\sqrt{y}$ si $y \geq 0$ et $-\sqrt{-y}$ si $y \leq 0$.

Et ainsi g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec :

$$g^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{y} & \text{si } y \geq 0 \\ -\sqrt{-y} & \text{si } y < 0 \end{cases} \end{cases} .$$

Exercice 5 On considère ici $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. “ f est majorée” : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$

Négation : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M$

“ f est minorée” : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq m$

Négation : $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) < m$.

2. Supposons f bornée. Notons $m, M \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. En appliquant le point précédent, on a :

$$m \leq f(x) \leq M \text{ et } m \leq f(y) \leq M$$

et en multipliant la seconde inégalité par -1 et en les additionnant, on déduit :

$$m - M \leq f(x) - f(y) \leq M - m$$

donc $a = m - M$ et $b = M - m$ conviennent.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Avec $y = 0$, on déduit : $a \leq f(x) - f(0) \leq b$. Et donc :

$$a + f(0) \leq f(x) \leq b + f(0)$$

ce qui prouve que f est bornée : elle est minorée par $a + f(0)$ et majorée par $b + f(0)$.

4. Procédons par double implication :

- si f est bornée : alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, a \leq f(x) - f(y) \leq b$$

et ce même b convient.

- réciproquement, si f vérifie cette assertion : pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$f(x) - f(y) \leq b \text{ et en échangeant les rôles de } x \text{ et } y \text{ } f(y) - f(x) \leq b \text{ donc } f(x) - f(y) \geq -b$$

et ainsi :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, -b \leq f(x) - f(y) \leq b$$

et par la question 3 on a bien que f est bornée. Ce qui prouve la réciproque.

D'où l'équivalence demandée.

Exercice 6 1. La partie entière de x est le plus grand entier inférieur ou égal à x .

2. (a) On a donc $\lfloor x - 4 \rfloor = \lfloor 2x - 1 \rfloor$. Par définition de la partie entière, comme $\lfloor x - 4 \rfloor$ est un entier, on a :

$$\lfloor x - 4 \rfloor \leq 2x - 1 < \lfloor x - 4 \rfloor + 1$$

et en utilisant que $x - 5 < \lfloor x - 4 \rfloor \leq x - 4$, on trouve bien l'inégalité voulue.

- (b) On a : $x - 5 < 2x - 1 < x - 3$.

Donc $x - 5 < 2x - 1$ et $2x - 1 < x - 3$.

Donc $-4 < x$ et $x < -2$.

C'est-à-dire $x \in]-4; -2[$.

3. Distinguons suivant les valeurs de x :

- si $x \in]-4; -7/2[$: $\lfloor x - 4 \rfloor = -8 \neq -9 = \lfloor 2x - 1 \rfloor$ donc un tel x n'est pas solution ;
- si $x \in [-7/2; -3[$: $\lfloor x - 4 \rfloor = -8 = -8 = \lfloor 2x - 1 \rfloor$ donc un tel x est solution ;
- si $x \in [-3; -5/2[$: $\lfloor x - 4 \rfloor = -7 = -7 = \lfloor 2x - 1 \rfloor$ donc un tel x est solution ;
- si $x \in [-5/2; -2[$: $\lfloor x - 4 \rfloor = -7 \neq -6 = \lfloor 2x - 1 \rfloor$ donc un tel x n'est pas solution.

4. On procède par analyse-synthèse :

- analyse : (c'est la question 2) une solution, si elle existe, est dans $] -4, -2[$;
- synthèse : (c'est la question 3) les seuls éléments de $] -4, -2[$ solutions sont les éléments de $[-7/2; -5/2[$.

En conclusion : l'ensemble solution est $\left[-\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right[$.

II Problème

II.1 Une preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

1. La propriété $\mathcal{P}(1)$ est :

$$\forall a_1, b_1 \in \mathbb{R}, a_1 b_1 \leq \sqrt{a_1^2} \sqrt{b_1^2}.$$

Elle est vraie car, par propriétés de la valeur absolue, pour tous $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ on a :

$$a_1 b_1 \leq |a_1 b_1| = |a_1| |b_1| = \sqrt{a_1^2} \sqrt{b_1^2}.$$

2. (a) Développons les deux membres de l'égalité à montrer. On a d'une part :

$$\begin{aligned} (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 &= a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 \\ &= \boxed{a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2} \end{aligned}$$

et de même :

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = \boxed{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2}$$

ce qui prouve bien l'égalité demandée.

(b) Soient $a_1, a_2 b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Alors :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq |a_1 b_1 + a_2 b_2| = \sqrt{(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2}$$

mais par la question précédente on a :

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}_{\geq 0} \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

et donc par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\sqrt{(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

En combinant ces inégalités, on a finalement :

$$\boxed{a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

ce qui était l'inégalité voulue.

Ceci étant vrai pour tous $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, on déduit que la propriété $\boxed{\mathcal{P}(2) \text{ est vraie}}$.

3. (a) En appliquant la propriété $\mathcal{P}(n)$ aux $2n$ réels $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, on a :

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}.$$

En ajoutant $a_{n+1}b_{n+1}$ à chaque membre de l'inégalité ci-dessus, on a bien l'inégalité demandée.

- (b) Appliquons la propriété $\mathcal{P}(2)$ aux réels $A = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$, $B = \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}$, $C = a_{n+1}$ et $D = b_{n+1}$. On a donc : $AB + CD \leq \sqrt{A^2 + C^2} \sqrt{B^2 + D^2}$, ce qui donne avec les valeurs précédentes de A, B, C, D :

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} + a_{n+1}b_{n+1} &\leq \sqrt{A^2 + a_{n+1}^2} \sqrt{B^2 + b_{n+1}^2} \\ &\leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2 + b_{n+1}^2}. \end{aligned}$$

En reprenant l'inégalité de la question précédente, on a finalement que :

$$\boxed{a_1b_1 + \dots + a_nb_n + a_{n+1}b_{n+1} \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2 + b_{n+1}^2}}.$$

Ceci étant vrai pour tous $a_1, \dots, a_{n+1}, b_1, \dots, b_{n+1} \in \mathbb{R}$, on a bien montré que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

4. On a donc montré que $\mathcal{P}(1)$ est vraie et que $\mathcal{P}$ est héréditaire : par principe de récurrence, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}}.$$

5. (a) Rappelons l'inégalité triangulaire : pour $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité :

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

avec égalité si, et seulement si, tous les x_i sont de même signe.

En l'appliquant ici aux $x_i = a_ib_i$, on a bien l'inégalité demandée, avec égalité si, et seulement si :

- ou bien tous les x_i sont positifs : c'est-à-dire que pour tout i , a_i et b_i sont de même signe ;
- ou bien tous les x_i sont négatifs : c'est-à-dire que pour tout i , a_i et b_i sont de signes opposés.

- (b) Considérons $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

Par la question précédente, on a :

$$|a_1b_1 + \dots + a_nb_n| \leq |a_1||b_1| + \dots + |a_n||b_n|.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux réels $|a_1|, \dots, |a_n|, |b_1|, \dots, |b_n|$, on a de même :

$$|a_1||b_1| + \dots + |a_n||b_n| \leq \sqrt{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2} \sqrt{|b_1|^2 + \dots + |b_n|^2} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}$$

en utilisant que $|x|^2 = (\pm x)^2 = x^2$.

En combinant les deux inégalités, il vient :

$$|a_1b_1 + \dots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}.$$

Dans cette dernière inégalité, les deux membres sont positifs. Par stricte croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^2$, on peut donc préserver l'inégalité en mettant chaque membre au carré, donc :

$$|a_1b_1 + \dots + a_nb_n|^2 \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}^2 \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}^2$$

ce qui donne :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Ce qui prouve l'inégalité demandée.

- (c) Supposons que l'on soit dans le premier cas : notons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i = \lambda b_i$. Alors :

$$(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 = (\lambda b_1^2 + \dots + \lambda b_n^2)^2 = \lambda^2 (b_1^2 + \dots + b_n^2)^2$$

et de même :

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) &= (\lambda^2 b_1^2 + \lambda^2 b_2^2 + \dots + \lambda^2 b_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \\ &= \lambda^2 (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)^2 \end{aligned}$$

ce qui donne bien que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est alors une égalité.

Si on est dans le deuxième cas, la preuve est exactement la même (et revient en fait à échanger les rôles de a_i et b_i pour tout i).

II.2 Inégalités des moyennes

6. (a) On a :

$$A_2(a, b) = \frac{a+b}{2}, \quad G_2(a, b) = \sqrt{ab}, \quad H_2(a, b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}, \quad Q_2(a, b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

et toutes ces quantités sont strictement positives, comme a, b le sont aussi.

- (b) On montre séparément les trois inégalités, avec le cas d'égalité. Comme toutes les quantités à comparer sont positives, notons déjà qu'il suffit de comparer leurs carrés.

- $H_2(a, b) \leq G_2(a, b)$:

$$\begin{aligned} H_2(a, b) \leq G_2(a, b) &\Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \\ &\Leftrightarrow \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \leq ab \\ &\Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2 \text{ en multipliant par } \frac{(a+b)^2}{ab} > 0 \\ &\Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \end{aligned}$$

et la dernière inégalité est toujours vraie (un carré de réel est toujours positif ou nul), ce qui prouve bien que : $H_2(a, b) \leq G_2(a, b)$.

De plus, les mêmes calculs montrent que l'on a égalité si, et seulement si, $(a-b)^2 = 0$, c'est-à-dire $a = b$.

- $G_2(a, b) \leq A_2(a, b)$:

$$\begin{aligned}
G_2(a, b) \leq A_2(a, b) &\Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \\
&\Leftrightarrow ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \\
&\Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2 \text{ en multipliant par } 4 > 0 \\
&\Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \\
&\Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2
\end{aligned}$$

et à nouveau la dernière inégalité est vraie (c'est la même), ce qui prouve bien que :

$$\boxed{G_2(a, b) \leq A_2(a, b)}.$$

Les mêmes calculs conduisent également à une égalité au départ si, et seulement si, $(a-b)^2 = 0$, c'est-à-dire $\boxed{a = b}$.

- $A_2(a, b) \leq Q_2(a, b)$:

$$\begin{aligned}
A_2(a, b) \leq Q_2(a, b) &\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \\
&\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \\
&\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \text{ en multipliant par } 4 > 0 \\
&\Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2
\end{aligned}$$

et à nouveau la dernière inégalité est vraie (c'est la même), ce qui prouve bien que :

$$\boxed{A_2(a, b) \leq Q_2(a, b)}.$$

Les mêmes calculs conduisent également à une égalité au départ si, et seulement si, $(a-b)^2 = 0$, c'est-à-dire $\boxed{a = b}$.

Ainsi, on a bien montré que $\boxed{H_2(a, b) \leq G_2(a, b) \leq A_2(a, b) \leq Q_2(a, b)}$, avec égalité dans n'importe laquelle des inégalités si, et seulement si, $\boxed{a = b}$.

7. (a) Posons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{x-1} - x$.

Les fonction $\exp$, $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto -x$ sont dérivables (fonctions usuelles ou polynomiales) sur $\mathbb{R}$, donc par composée et somme la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = e^{x-1} - 1$$

et on a donc les variations suivantes pour f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$+\infty$		$+\infty$
		↘	↗
		0	

(où on a rajouté les limites en $\pm\infty$ bien que celles-ci ne soient pas utiles)

Et on déduit ainsi des variations de f sur $\mathbb{R}$ que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(1) = 0$$

avec égalité si, et seulement si, $x = 1$.

Ce qui prouve bien que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, x \leq e^{x-1} \text{ avec égalité si, et seulement si, } x = 1}.$$

(b) Appliquons déjà l'inégalité précédente aux réels $\frac{a_i}{A_n(a_1, \dots, a_n)}$. On a ainsi :

$$\boxed{\forall i \in \{1, \dots, n\}, 0 < \frac{a_i}{A_n(a_1, \dots, a_n)} \leq \exp \left(\frac{a_i}{A_n(a_1, \dots, a_n)} - 1 \right)}$$

On peut multiplier toutes les inégalités (comme elles sont toutes positives et dans le même sens), ce qui donne :

$$0 < \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(A_n(a_1, \dots, a_n))^n} \leq \exp \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{A_n(a_1, \dots, a_n)} - n \right)$$

(par propriété de l'exponentielle sur les produits)

Mais, par définition de A_n , on a :

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{A_n(a_1, \dots, a_n)} - n = \frac{n A_n(a_1, \dots, a_n)}{A_n(a_1, \dots, a_n)} - n = n - n = 0$$

et ainsi :

$$0 < \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(A_n(a_1, \dots, a_n))^n} \leq 1.$$

En multipliant par $(A_n(a_1, \dots, a_n))^n$ (qui est strictement positif), on déduit :

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq (A_n(a_1, \dots, a_n))^n$$

et par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, on a finalement :

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq A_n(a_1, \dots, a_n).$$

Et ainsi on a bien : $\boxed{G_n(a_1, \dots, a_n) \leq A_n(a_1, \dots, a_n)}$.

Pour le cas d'égalité, la stricte croissance de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ impose que l'on a égalité à la fin si, et seulement si, on a égalité à chaque étape du calcul. C'est-à-dire si, et seulement si, pour tout i on a :

$$\frac{a_i}{A_n(a_1, \dots, a_n)} \leq \exp \left(\frac{a_i}{A_n(a_1, \dots, a_n)} - 1 \right).$$

Par la question précédente, c'est le cas si, et seulement si, pour tout i :

$$\frac{a_i}{A_n(a_1, \dots, a_n)} = 1$$

et donc :

$$\boxed{a_1 = a_2 = \dots = a_n = A_n(a_1, \dots, a_n)}.$$

Nécessairement, s'il y a égalité, alors tous les a_i sont égaux.

Réciproquement, supposons que tous les a_i sont égaux. Posons $a \in \mathbb{R}_+$ leur valeur commune. Alors :

$$A_n(a_1, \dots, a_n) = \frac{a + a + \dots + a}{n} = \frac{na}{n} = a$$

et donc on a bien $a_1 = \dots = a_n = A_n(a_1, \dots, a_n)$, car toutes ces quantités valent a .

Et finalement : il y a égalité si, et seulement si, tous les a_i sont égaux.

8. (a) Par définition, on a :

$$\boxed{H_n(a_1, \dots, a_n)} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}} = \boxed{\frac{1}{A_n \left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n} \right)}}.$$

(b) Appliquons le résultat précédents aux $\frac{1}{a_i}$. On a ainsi :

$$G_n \left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n} \right) \leq A_n \left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n} \right)$$

avec égalité si, et seulement si, les $\frac{1}{a_i}$ (donc tous les a_i) sont égaux.

Mais $G_n \left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n} \right), A_n \left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n} \right)$ sont strictement positifs : par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc :

$$\underbrace{\frac{1}{A_n \left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n} \right)}}_{H_n(a_1, \dots, a_n)} \leq \frac{1}{G_n \left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n} \right)}$$

avec égalité si, et seulement, les a_i sont égaux.

Mais on a aussi :

$$\frac{1}{G_n \left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n} \right)} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \dots \frac{1}{a_n}}} = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = G_n(a_1, \dots, a_n).$$

Et finalement, on trouve bien :

$$\boxed{H_n(a_1, \dots, a_n) \leq G_n(a_1, \dots, a_n)}$$

avec égalité si, et seulement si, tous les a_i sont égaux.

9. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux réels $a_1, a_2, \dots, a_n, 1, 1, \dots, 1$. On a :

$$(a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 1)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(1^2 + 1^2 + \dots + 1^2)$$

c'est-à-dire :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot n$$

et par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ (comme tout est positif ci-dessus) :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{n}$$

et en divisant par $n > 0$, on trouve :

$$\underbrace{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}}_{=A_n(a_1, \dots, a_n)} \leq \underbrace{\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}}_{=Q_n(a_1, \dots, a_n)}$$

ce qui est l'inégalité demandée.

Pour le cas d'égalité, on a donc égalité dans la dernière inégalité si, et seulement si, l'inégalité de Cauchy-Schwarz que l'on a utilisée est une égalité. Par le résultat de la première partie, c'est le cas si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i = \lambda) \text{ ou } (\forall i \in \{1, \dots, n\}, 1 = \lambda a_i)$$

ce qui donne dans les deux cas que tous les a_i sont égaux (dans le premier cas égaux à λ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$, et dans le second à $\frac{1}{\lambda}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}^*$).

II.3 Quelques applications

10. Notons S la surface que l'on fixe. Considérons a, b, c les longueurs des trois côtés du parallélépipède rectangle considéré.

On a ainsi : $S = 2(ab + bc + ca)$.

Le volume du parallélépipède est de $V = abc$.

Par la question 7, on a :

$$G_3(ab, bc, ca) = \sqrt[3]{(abc)^2} = \sqrt[3]{V^2} \leq \frac{ab + bc + ca}{3} = \frac{S}{6}.$$

Par croissance de la racine carrée, on a donc :

$$\sqrt[3]{V} \leq \sqrt{\frac{S}{6}}$$

et par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt[3]{x}$:

$$V \leq \left(\sqrt{\frac{S}{6}} \right)^3 = \sqrt{\frac{S^3}{216}}.$$

Reste à montrer que c'est une égalité si, et seulement si, on a un cube. Mais d'après la condition d'égalité de la question 7, on a une égalité si, et seulement si : $ab = bc = ca$, c'est-à-dire $a = b = c$.

C'est bien la situation du cube !

On peut vérifier d'ailleurs que l'on a bien égalité pour le cube : si on a un cube de côté a , alors : $S = 6a^2$ et $V = a^3$ et on a bien :

$$V = a^3 \text{ et } \sqrt{\frac{S^3}{216}} = \sqrt{a^6} = a^3.$$

11. Considérons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels strictement positifs de somme 1. Pour tout i , posons $a_i = \sqrt{\alpha_i}$ et $b_i = \frac{1}{a_i} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}}$.

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux réels $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. On a :

$$\underbrace{\left(\underbrace{a_1 b_1}_{=1} + \dots + \underbrace{a_n b_n}_{=1} \right)}_{=n^2}^2 \leq \underbrace{\left(\underbrace{a_1^2}_{=\alpha_1} + \dots + \underbrace{a_n^2}_{=\alpha_n} \right)}_{=1} \underbrace{\left(\underbrace{b_1^2}_{=1/\alpha_1} + \dots + \underbrace{b_n^2}_{=1/\alpha_n} \right)}_{=\frac{1}{\alpha_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}}.$$

Et finalement, on trouve que :

$$\frac{1}{\alpha_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_n} \geq n^2$$

comme demandé.

Remarque : ce n'est pas demandé, mais on a égalité si, et seulement si, tous les α_i sont égaux. On veut en effet, pour avoir égalité, qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout i : $\sqrt{\alpha_i} = \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_i}}$, c'est-à-dire que $\alpha_i = \lambda$.