

# DM n°1

## Consignes de rédaction :

- utilisez des copies doubles, avec sur chacune le nom, et le numéro de la copie ;
- numérotez les questions suivant la numération du sujet ;
- les copies doivent être soignées et correctement présentées :
  - barrez proprement si nécessaire (pas de correcteur liquide, pas de rature) ;
  - Soulignez ou encadrez les résultats ;
  - formez une marge (s'il n'y en a pas déjà) et n'écrivez pas dedans (dans tous les cas), aérez votre copie en sautant des lignes entre les questions ;
- la notation tiendra très fortement compte de la rédaction et de la présentation ;
- les exercices sont indépendants, et se veulent progressifs dans la difficulté (ce dernier point n'est pas un absolu comme la notion de difficulté est très subjective) ;
- il faut bien lire les questions et s'assurer d'y avoir bien répondu (surtout quand les questions comportent différentes parties) ; il est fortement recommandé de relire chaque question après en avoir écrit la réponse pour s'assurer d'y avoir bien répondu ;
- le problème est indépendant des exercices ;
- il est préférable d'en faire peu, mais bien, plutôt que beaucoup, mais mal ;
- il ne faut pas hésiter à passer une question qui semble trop difficile : les résultats d'une question, même s'ils n'ont pas été démontrés, peuvent alors être utilisés dans la suite de l'exercice.

## Indications de barème :

- exercices : 11,8,10,11,13 et 10 points
- problème : 49 points
- Total pour avoir 20/20 : 65 points

## I Exercices

**Exercice 1** 1. On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

Montrer que  $(u_n)$  est constante.

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, 2^n > n.$$

3. On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n(1 - n).$$

**Exercice 2** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . On considère l'assertion  $A$  suivante :

$$A : (ab \geq a) \Rightarrow (a \leq 0 \text{ ou } b \geq 1)$$

1. Écrire en français l'assertion  $A$ .
2. Écrire en symboles mathématiques la négation et la contraposée de  $A$ .
3. Dire si  $A$  est vraie ou fausse, et le prouver.
4. Dire si la réciproque de  $A$  est vraie ou fausse, et le prouver.

**Exercice 3** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes en précisant à chaque fois les cas d'égalité :

1.  $\left| \frac{x-1}{x+3} \right| \geq 2$  ;
2.  $\sqrt{18-x} + \sqrt{7+x} \leq 7$ .

**Exercice 4** On considère les fonctions  $f : x \mapsto \frac{x+4}{x-1}$  et  $g : x \mapsto x \cdot |x|$ .

1. (a) On fixe  $y \in \mathbb{R}$ . Résoudre l'équation  $f(x) = y$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .  
(b) En déduire deux ensembles  $I$  et  $J$  de  $\mathbb{R}$  les plus grands possibles tels que  $f$  réalise une bijection de  $I$  dans  $J$ , et donner l'expression de  $f^{-1}$ .
2. Faire de même pour  $g$ .

**Exercice 5** On considère ici  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Écrire en symboles mathématiques les assertions “ $f$  est majorée” et “ $f$  est minorée” ainsi que leurs négations.
2. On suppose que  $f$  est bornée : montrer qu'il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, a \leq f(x) - f(y) \leq b.$$

3. Inversement, on suppose qu'il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que :  $\forall x, y \in \mathbb{R}, a \leq f(x) - f(y) \leq b$ . Montrer que  $f$  est bornée.
4. À l'aide éventuellement des questions précédentes, montrer que  $f$  est bornée si, et seulement si, il existe  $b \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) - f(y) \leq b.$$

**Exercice 6** On souhaite résoudre l'équation  $\lfloor x - 4 \rfloor = \lfloor 2x - 1 \rfloor$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , rappeler en français la définition de la partie entière de  $x$ .
2. On considère  $x$  solution de l'équation.
  - (a) Montrer que  $x - 5 < 2x - 1 < x - 3$ .
  - (b) En déduire un encadrement de  $x$ .
3. On considère  $x \in ]-4; -2[$  déterminer les valeurs possibles de  $\lfloor x - 4 \rfloor$  et  $\lfloor 2x - 1 \rfloor$ , en donnant les valeurs de  $x$  correspondantes.
4. Conclure.

## II Problème

Le but de ce problème est de montrer, par différentes méthodes, quelques inégalités classiques.

### II.1 Une preuve de l'inégalité de Cauchy–Schwarz

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose la propriété  $\mathcal{P}(n)$  suivante :

$$\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}, \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}.$$

1. Énoncer et prouver  $\mathcal{P}(1)$ .
2. (a) Soient  $a_1, a_2, b_1, b_2$  quatre réels. Montrer que  $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$ .  
(b) En déduire que  $\mathcal{P}(2)$  est vraie.
3. On souhaite montrer que la propriété  $\mathcal{P}$  est héréditaire. On considère donc  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, et on va montrer que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.  
(a) On considère les  $(2n+2)$  réels  $a_1, \dots, a_{n+1}, b_1, \dots, b_{n+1}$ . Montrer que :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2} + a_{n+1} b_{n+1}.$$

- (b) En utilisant éventuellement  $\mathcal{P}(2)$ , en déduire que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.
4. Déduire des questions précédentes que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.
5. (a) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ . Montrer que :

$$|a_1 b_1 + \dots + a_n b_n| \leq |a_1| |b_1| + \dots + |a_n| |b_n|$$

et préciser le cas d'égalité.

- (b) En déduire **l'inégalité de Cauchy–Schwarz** : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  :

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

- (c) Montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy–Schwarz dès lors que les  $a_i$  sont proportionnels aux  $b_i$  suivant un même rapport, c'est-à-dire que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, (\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i = \lambda b_i) \text{ ou } (\forall i \in \{1, \dots, n\}, b_i = \lambda a_i).$$

*Remarque* : on pourra admettre que c'est la seule condition possible pour que l'inégalité de Cauchy–Schwarz soit une égalité.

### II.2 Inégalités des moyennes

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ , on définit leur :

- **moyenne arithmétique** :  $A_n(a_1, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  ;
- **moyenne géométrique** :  $G_n(a_1, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$  ;
- **moyenne harmonique** :  $H_n(a_1, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$  ;

- **moyenne quadratique** :  $Q_n(a_1, \dots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$ .

On souhaite dans cette partie comparer ces quatre quantités.

6. On s'intéresse ici au cas  $n = 2$ . On fixe  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ .

- Exprimer simplement  $A_2(a, b), G_2(a, b), H_2(a, b), Q_2(a, b)$ . Que dire du signe de ces quantités ?
- Montrer que :

$$H_2(a, b) \leq G_2(a, b) \leq A_2(a, b) \leq Q_2(a, b)$$

avec égalité dans chaque inégalité si, et seulement si,  $a = b$ .

*Indication* : on pourra commencer par constater que toutes les quantités à comparer sont strictement positives, et chercher à faire apparaître des identités remarquables

Pour toute la suite de cette partie, on fixe  $n \in \mathbb{N}^*$  ainsi que  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$  :

7. On souhaite montrer que  $G_n(a_1, \dots, a_n) \leq A_n(a_1, \dots, a_n)$  :

- Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $x \leq e^{x-1}$ , et donner le cas d'égalité.

*Indication* : on pourra étudier les variations de  $x \mapsto e^{x-1} - x$ .

- En déduire l'inégalité voulue, ainsi que la situation d'égalité.

*Indication* : on pourra appliquer l'inégalité précédente aux réels  $\frac{a_i}{A_n(a_1, \dots, a_n)}$  et utiliser la stricte croissance sur  $\mathbb{R}_+$  de  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ .

8. On souhaite montrer que  $H_n(a_1, \dots, a_n) \leq G_n(a_1, \dots, a_n)$  :

- Déterminer une relation entre  $H_n(a_1, \dots, a_n)$  et  $A_n(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n})$ .

- En utilisant l'inégalité entre  $A_n$  et  $G_n$  montrée à la question précédente, en déduire l'inégalité voulue, ainsi que la situation d'égalité.

9. En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, montrer que :  $A_n(a_1, \dots, a_n) \leq Q_n(a_1, \dots, a_n)$ , et préciser la situation d'égalité.

## II.3 Quelques applications

À l'aide des inégalités montrées précédemment, montrer que :

- À surface fixée, le cube est le parallélépipède rectangle dont le volume est le plus grand.
- Étant donnés  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $n$  réels positifs strictement de somme 1, la somme de leurs inverses est supérieure ou égale à  $n^2$ .