TD : suites récurrentes et suites implicites

Exercice 1 [Équivalent d'une suite implicite]

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En tant que fonction polynomiale, la fonction f_n est continue dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) = -1 - nx^{n-1} \leqslant -1 < 0$$
donc est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où le tableau de variation :

x	0	$+\infty$
f_n'	$-$	
f_n	$1 \searrow$	$-\infty$

où on a utilisé que $f_n(0) = 1$ (calcul direct) et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$ (polynôme de coefficient dominant négatif).

Par théorème de la bijection monotone, la fonction f_n réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty; 1] = f_n(\mathbb{R}_+)$, ce qui assure existence et unicité de solution à l'équation $f_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Par définition de u_1, on a : $1 - u_1 - u_1^1 = 0$, c'est-à-dire $1 - 2u_1 = 0$, donc $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

De même, on a : $1-u_2-u_2^2 = 0$, donc $u_2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Comme $u_2 \in \mathbb{R}_+$, on déduit que $u_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$f_n(0) = 1 > 0 \text{ et } f_n(1) = -1 < 0$$
et donc par monotonie de f_n, comme $f_n(u_n) = 0$, on a : $0 < u_n < 1$.

Remarque : en utilisant que $\sqrt{5} \simeq 2.2$, on trouve bien que $u_2 \simeq 0.6 \in]0, 1[$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $u_{n+1} > u_n$. Par décroissance de la fonction f_n, il suffit de montrer que $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n) = 0$.

Or, on a :
$$\begin{array}{rcl} f_n(u_{n+1}) & = & 1 - u_{n+1} - u_{n+1}^n \\ & < & 1 - u_{n+1} - u_{n+1}^{n+1} (\text{en utilisant que } u_{n+1} \in]0; 1[\text{ et donc que } u_{n+1}^{n+1} < u_{n+1}^n) \\ & < & f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 \end{array}$$
ce qui donne bien que $f_n(u_{n+1}) < 0$, et donc : $u_{n+1} > u_n$.

Donc la suite (u_n) est bien croissante.

Remarque : elle est même strictement croissante du fait des inégalités strictes trouvées.

5. La suite (u_n) est donc croissante et majorée (par 1), donc par théorème de la limite monotone elle converge vers un réel $l \in [0; 1]$.

En utilisant le calcul de u_2 et la stricte monotonie, on a même : $l \in \left] \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; 1 \right]$.

6. On suppose par l'absurde que $l < 1$:

   (a) Comme (u_n) est croissante, et minorée par 0, on a donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n < l$$
   et ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n^n < l^n.$$
   Comme on a supposé que $l < 1$, alors $l \in [0; 1[$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} l^n = 0$. Par encadrement, il vient donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$.

   Remarque : on peut aussi procéder par calcul direct et composition. Comme $l < 1$, alors on n'a plus de forme indéterminée :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^n = \exp\left(\underbrace{n\ln(u_n)}_{\sim n\ln(l)\to-\infty}\right) \to 0$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de u_n, on a : $f_n(u_n) = 0$, c'est-à-dire que : $0 = 1 - u_n - u_n^n$.
   En passant à la limite, il vient : $0 = 1 - l - 0$, et donc $l = 1$.
   D'où la contradiction avec le fait que $l < 1$.
   On a ainsi $l \geqslant 1$, et donc $l = 1$.
   Et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

7. On définit la suite $(v_n) = (1 - u_n)$.

   (a) Comme (u_n) est croissante strictement et tend vers 1, alors la suite $(v_n) = (1-u_n)$ et décroissante strictement tendant vers 0, et tous ses termes sont donc strictement positifs.
   En particulier, la suite $(\ln(v_n))$ est bien définie, et par composition de limite et croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, cette suite est décroissante tendant vers $-\infty$.

   Remarque : si on n'utilisait pas la stricte monotonie de la suite (u_n) (mais seulement sa monotonie), on trouvait seulement que v_n était une suite de réels positifs ou nuls. Restait à montrer que l'on n'avait jamais $v_n = 0$, c'est-à-dire $u_n = 1$, qui découle directement du fait que $f_n(1) = -1 \neq 0$ et de l'injectivité de f_n.

   (b) Comme (v_n) tend vers 0, alors par composition on a directement l'équivalent : $\ln(1 - v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$.
   Mais par définition de u_n et de v_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$\ln(v_n) = \ln(1 - u_n) = \ln(u_n^n) = n\ln(u_n) = n\ln(1 - v_n)$$
   et par équivalent d'un produit il vient :
$$\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n.$$

   (c) On déduit ainsi que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-\ln(v_n)}{nv_n} = 1$, et donc par continuité de ln en 1 que :
$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right) = 0.$$

Comme on a de plus que $\lim_{n\to+\infty} \ln(v_n) = -\infty$, il vient par limite d'un quotient que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{\ln(v_n)} = 0.$$

En développant le numérateur, on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln(-\ln(v_n)) - \ln(n) - \ln(v_n)}{\ln(v_n)}\right) = 0.$$

Mais on a également :

- comme $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (par croissances comparées) et $\lim_{n\to+\infty} -\ln(v_n) = +\infty$, alors par composition on a : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(-\ln(v_n))}{\ln(v_n)} = 0$;
- par calcul direct : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(v_n)}{\ln(v_n)} = 1$.

En réinjectant ces deux limites, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} = -1$$

ce qui prouve bien que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

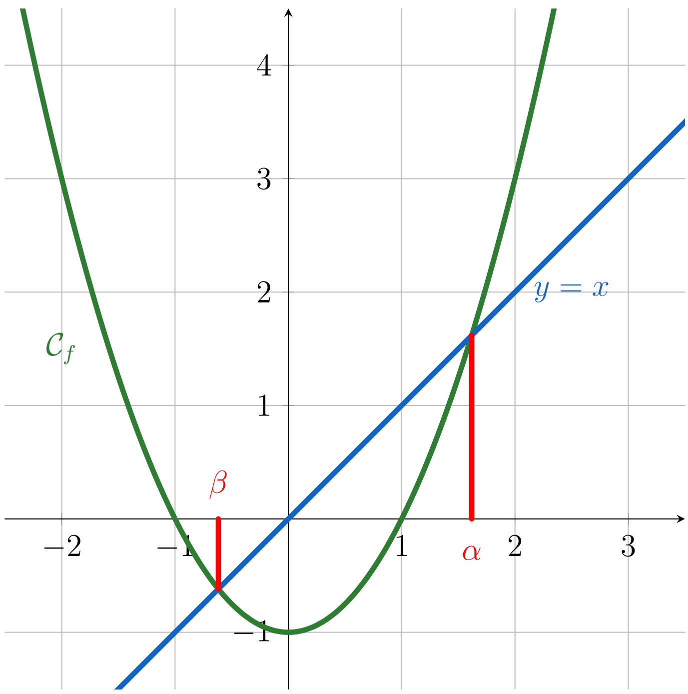
(d) Par transitivité de la relation d'équivalence, on déduit des deux questions précédentes que : $-nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$. Et par quotient d'équivalents on a donc : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 2 [Étude d'une suite récurrente]

1. Les variations de f se déduisent directement de celle de la fonction $x \mapsto x^2$ et on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_n	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
et donc $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Ce n'était pas demandé (mais c'est utile) : on a le tracé suivant pour la courbe de f ainsi que la première bissectrice :



3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$g(x) - x = f \circ f(x) - x = \left(x^2 - 1\right)^2 - 1 - x = x^4 - 2x^2 - x = x\left(x^3 - 2x - 1\right)$$
qui est un polynôme de degré 4, et s'annule donc au plus quatre fois sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que g possède au plus quatre points fixes. Or, on a :

- α et β sont points fixes pour f, donc pour g également car :
$$g(\alpha) = f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha$$
(et pareil pour β) ;

- 0 est racine évidente de $g(x)-x$, donc 0 est un point fixe de g ;
- les images par f de points fixes pour g sont des points fixes pour g (calcul immédiat) et ainsi $f(0)=-1$ est aussi un point fixe de g.

Et finalement, les quatre points fixes de g sont (dans l'ordre) : -1, β, 0 et α.

Notons que la résolution de l'équation $g(x)=x$ nous donne le signe de $g(x)-x$ sur $\mathbb{R}$. On a en effet $g(x)-x$ est un polynôme unitaire de degré 4 dont les racines sont données ci-dessus, et on a donc la factorisation $g(x)-x=(x+1)(x-\beta)x(x-\alpha)$ ce qui donne le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		β		0		α		$+\infty$
$g(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

4. (a) Montrons le résultat par récurrence :
   - par hypothèse, on a déjà : $u_0\in[-1;0]$;
   - soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $u_n\in[-1;0]$. La fonction f est strictement décroissante sur $[-1;0]$, et donc $u_{n+1}=f(u_n)\in[f(0);f(-1)]=[-1;0]$, ce qui prouve l'hérédité.

   D'où le résultat demandé par récurrence.

   Remarque : on pouvait aussi constater que $[-1;0]$ est stable par f (du fait des variations de f), ce qui revient au même.

   (b) La fonction f est strictement décroissante sur $[-1;0]$ et la suite récurrence (u_n) est alors à valeurs dans $[0;1]$: un résultat du cours donne directement que (v_n) et (w_n) sont monotones de variations opposées.

   (c) Les suites (v_n) et (w_n) étant extraites de (u_n), elles sont également à valeurs dans $[0;1]$. En tant que suites monotones bornées, elles convergent vers un point fixe de g de $[0;1]$ (comme f, donc g, est continue). Et ainsi les limites possibles de (v_n) et (w_n) sont 0, β et -1.

   On peut même en dire un peu plus à ce stade : du fait de la relation $w_n=f(v_n)$, on a $f(\lim v_n)=\lim w_n$, donc :
   - ou bien (v_n) et (w_n) convergent toutes les deux vers β ;
   - ou bien, parmi (v_n) et (w_n), l'une tend vers 0 et l'autre vers -1.

   (d) On suppose que $u_0\in[-1;\beta[$. On a alors $v_0=u_0\in[-1;\beta[$ et :
   $$v_1=u_2=g(u_0)\leqslant u_0=v_0$$
   en utilisant le signe de $g(x)-x$ sur $[-1;\beta[$ (donné en question 3).

   On déduit ainsi que la suite (v_n) est décroissante, à valeurs dans $[-1;u_0]\subset[-1;\beta[$. Sa limite est donc nécessairement -1 (seule limite possible dans $[-1;u_0]$).

   Et (w_n) tend vers 0 par la remarque donnée en question précédente.

   (e) On procède comme ci-dessus : $v_0=u_0\in]\beta;0]$ et :
   $$v_1=u_2=g(u_0)\geqslant u_0=v_0$$
   par signe de $g(x)-x$ sur $]\beta;0]$ (donné en question 3 aussi).

   Et la suite (v_n) est donc croissante, à valeurs dans $[u_0;0]\subset]\beta;0]$. Sa limite est donc nécessairement 0 (seule limite possible dans $[u_0;0]$).

   Et comme précédemment, on déduit que (w_n) tend vers -1.

(f) On déduit qu'on a les cas suivants :

- si $u_0 = \beta$: comme β est point fixe de f, la suite (u_n) est constante de valeur β et converge ;
- si $u_0 < \beta$: alors la suite diverge, et plus précisément sa suite extraite des termes de rangs pairs tend vers -1 et celle de ses termes de rangs impairs tend vers 0 ;
- si $u_0 > \beta$: alors la suite diverge, et plus précisément sa suite extraite des termes de rangs pairs tend vers 0 et celle de ses termes de rangs impairs tend vers -1.

Cela donne bien que la suite (u_n) converge alors si, et seulement si, elle est constante (de valeur β).

5. (a) On procède par récurrence :

- par hypothèse, on a déjà : $u_0 \geqslant \alpha$;
- soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant \alpha$. La fonction f est strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$, et donc $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant f(\alpha) = \alpha$, ce qui prouve l'hérédité.

D'où le résultat demandé par récurrence.

(b) La fonction f est croissante sur $[\alpha; +\infty[$, et la suite (u_n) est une suite récurrente associée à f à valeurs dans $[\alpha; +\infty[$: elle est donc monotone.

(c) La monotonie de (u_n) se détermine en regardant ses deux premiers termes.

Si $u_0 > \alpha$, alors $u_1 = f(u_0) > u_0$ (étude du signe de $f(x) - x$, qui en tant que polynôme du second degré de coefficient dominant positif est strictement positif hors de ses racines, donc pour $x > \alpha$). Et donc (u_n) est alors croissante.

Elle a une limite (finie ou non a priori).

Supposons par l'absurde qu'elle tend vers une limite finie : on aurait alors, en notant ℓ sa limite, que ℓ est un point fixe de f (f est continue sur $\mathbb{R}$, et par propriété d'une limite d'une suite récurrente). Mais on a aussi $\ell \in [u_0; +\infty[\subset]\alpha; +\infty[$ (comme (u_n) est croissante). Mais le plus grand point fixe de f étant α, on ne peut avoir de limite finie.

Donc (u_n) a une limite infinie : en tant que suite croissante elle tend vers $+\infty$.

(d) On a donc deux cas :

- si $u_0 = \alpha$: la suite (u_n) est constante à α (et converge vers α) ;
- si $u_0 > \alpha$: la suite (u_n) est strictement croissante et tend vers $+\infty$ (elle diverge).

En particulier, on retrouve que (u_n) converge si, et seulement si, elle est constante.

6. (a) Par l'absurde : si on avait pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $u_n \in]0; \alpha[$:

- la fonction f est croissante sur $]0; \alpha[$ donc (u_n) serait monotone ;
- plus précisément, comme $f(x) - x$ est négatif sur $]0; \alpha[$, (u_n) serait décroissante ;
- en tant que suite décroissante minorée (par 0), la suite (u_n) converge ;
- sa limite est un point fixe de f dans $[0; u_0] \subset [0; \alpha[$.

D'où la contradiction, car un tel point fixe n'existe pas.

Et finalement il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 0$. Par étude des variations de f on a même $u_n \in [-1; 0]$.

(b) On se ramène au cas de la question 4) : on a vu en 4)d) que la suite (u_n) avec $u_0 \in [-1; 0]$ converge si, et seulement si : $u_0 = \beta$. La suite $(v_n) = (u_{n+n_0})$ aussi (elle vérifie la même définition). Et regarder (v_n) revient à regarder (u_n) à partir du rang n_0, ce qui donne bien le résultat.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in [-1; +\infty[$. On a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 1 = y \Leftrightarrow x^2 = y + 1 \text{car } \underset{\Leftrightarrow}{x} \geqslant 0 x = \sqrt{y+1} \Leftrightarrow x = h(y)$$

ce qui prouve bien le résultat demandé.
Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, par monotonie d'une réciproque, h est strictement croissante sur $[-1; +\infty[$.

(d) Notons déjà que, par construction, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = h^n(\beta)$$

(la puissance désignant ici la composition de fonctions). Et donc :

$$A = \{h^n(\beta) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

On sait déjà que la suite (u_n) converge si, et seulement si, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = \beta$.
Mais par définition de u_n, on a :

$$u_{n_0} = f(u_{n_0-1}) = f^2(u_{n_0-2}) = \cdots = f^{n_0}(u_0)$$

avec $u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1} \in \mathbb{R}_+^*$ par minimalité de n_0.
En appliquant h à l'égalité précédente n_0 fois, on déduit que :

$$u_0 = h^{n_0}(u_{n_0}).$$

Et finalement (u_n) converge si, et seulement si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_0 = h^{n_0}(\beta)$, c'est-à-dire si, et seulement si : $u_0 \in A$.

7. Notons déjà que, par parité de la fonction f, il suffit de raisonner sur u_0 au signe près.

   On déduit de ce constat et des questions précédentes :

   - si $u_0 = \alpha$ ou β : la suite (u_n) est constante, et converge vers α ou β ;
   - si $u_0 \in]-\infty; -\alpha[\cup]\alpha; +\infty[$: la suite (u_n) est strictement croissante et tend vers $+\infty$;
   - si $u_0 \in A$ ou $-u_0 \in A$: alors (u_n) est stationnaire à β, et converge vers β ;
   - si $u_0 = -\alpha$: $u_1 = \alpha$ et (u_n) est stationnaire à α, et converge vers α ;
   - si $\pm u_0 \in]-\alpha; \alpha[\setminus A$: la suite (u_n) diverge (avec ses suites extraites de rangs pairs ou impairs qui convergent pour l'une vers 0 et pour l'autre vers -1).

8. Supposons par l'absurde que (u_n) tende vers l sans être stationnaire : par continuité de f, on déduit $f(l) = l$ (et donc $l = \alpha$ ou β), et ainsi (u_n) ne prend jamais la valeur de l (car si elle la prenait à un rang, elle la garderait, et (u_n) serait stationnaire, ce qui est interdit).

   Mais alors le quotient : $\dfrac{u_{n+1} - l}{u_n - l} = \dfrac{f(u_n) - f(l)}{u_n - l}$ est bien défini (u_n ne prend jamais la valeur de l donc le dénominateur ne s'annule pas), et tend vers $f'(l) = 2l$.

   Par continuité de la valeur absolue, le quotient $\dfrac{|u_{n+1} - l|}{|u_n - l|}$ tend donc vers $|2l| = \sqrt{5} \pm 1$ (suivant que $l = \alpha$ ou $l = \beta$). Dans les deux cas, on a $|2l| > 1$, ce qui impose que la suite $(|u_n - l|)$ est croissante à partir d'un certain rang (le quotient $\dfrac{|u_{n+1} - l|}{|u_n - l|}$ ne prend que des valeurs strictement plus grandes que 1 à partir d'un certain rang).

   Mais la suite $(|u_n - l|)$ ne s'annule jamais, et est strictement croissante à partir d'un certain rang (disons n_0) : sa limite, qui devrait être 0, doit aussi être au moins égale à $|u_{n_0} - l| > 0$. Et donc $0 > 0$: d'où la contradiction.

   Donc les seules suites qui convergent sont les suites stationnaires, comme on l'a montré avant.