# TD : suites récurrentes et suites implicites

**Exercice 1** [Équivalent d'une suite implicite]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = 1 - x - x^n.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, que l'on notera $u_n$.
2. Calculer $u_1$ et $u_2$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \in ]0;1[$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
5. En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers une limite $l$, dont on donnera un encadrement.

   **Remarque :** on ne cherchera pas à déterminer $l$, mais on en donnera un encadrement le plus précis possible à l'aide des calculs effectués aux questions précédentes.
6. On souhaite montrer à cette question que $l = 1$. Pour cela, on suppose par l'absurde que $l < 1$ :
   (a) Montrer que la suite $(u_n^n)$ converge, vers une limite que l'on précisera.
   (b) Conclure.
7. Le but de cette question est de déterminer la vitesse de convergence de la suite $(u_n)$ vers $l$. On définit pour cela la suite $(v_n) = (1 - u_n)$.
   (a) Préciser la monotonie de $(v_n)$ ainsi que sa limite. En déduire que la suite $(\ln(v_n))$ est bien définie, et donner sa monotonie ainsi que sa limite.
   (b) Donner un équivalent de $\ln(1 - v_n)$, puis en déduire que : $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$.
   (c) En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{\ln(v_n)} = 0$, puis que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$.
   (d) En déduire un équivalent le plus simple possible de $v_n$.

**Exercice 2** [Étude d'une suite récurrente]

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 1.$$

et on pose la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1.$$

1. Donner les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$, qu'on notera $\alpha, \beta$ avec $\alpha > \beta$, et les expliciter.
3. On pose $g = f \circ f$. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet exactement quatre solutions distinctes
4. On suppose pour cette question seulement que $u_0 \in [-1; 0]$.

(a) Montrer que l'on a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [-1;0]$.

(b) En déduire que les suites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$ sont monotones de variations opposées.

(c) Montrer que $(v_n), (w_n)$ convergent, et donner leurs limites possibles.

(d) On suppose que $u_0 \in [-1;\beta[$. Montrer alors que $(v_n)$ est décroissante, $(w_n)$ est croissante, et donner leurs limites.

(e) On suppose que $u_0 \in ]\beta;0]$. Montrer alors que $(v_n)$ est croissante, $(w_n)$ est décroissante, et donner leurs limites.

(f) Déduire des questions précédentes que, si $u_0 \in [-1;0]$, la suite $(u_n)$ converge si, et seulement si, elle est constante, et donner alors sa limite. Que se passe-t-il dans les autres cas ?

5. On suppose pour cette question seulement que $u_0 \in [\alpha;+\infty[$.

(a) Montrer que l'on a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\alpha;+\infty[$.

(b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)$.

(c) Montrer que, si $u_0 > \alpha$, alors $(u_n)$ diverge (et préciser son comportement).

(d) Déduire des questions précédentes que, si $u_0 \in [\alpha;+\infty[$, la suite $(u_n)$ converge si, et seulement si, elle est constante, et donner alors sa limite. Que se passe-t-il dans les autres cas ?

6. On suppose pour cette question seulement que $u_0 \in ]0;\alpha[$.

(a) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $u_n \in [-1;0]$.

**Indication :** on pourra procéder par l'absurde, et montrer que dans le cas contraire $(u_n)$ devrait converger vers un élément de $[0;\alpha[$ ce qui est impossible.

On pose pour la suite $n_0 \in \mathbb{N}$ le plus petit possible tel que $u_{n_0} \in [-1;0]$.

(b) Montrer que $(u_n)$ converge si, et seulement si : $u_{n_0} = \beta$.

On pose :

$$h : \begin{cases} [-1;+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{cases}$$

(c) Montrer que $h$ est la bijection réciproque de la restriction de $f$ à $\mathbb{R}_+$, et en déduire les variations de $h$.

(d) On définit la suite $(a_n)$ par :

$$a_0 = \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = h(a_n).$$

Et on pose : $A = \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ (l'ensemble des valeurs prises par la suite $(a_n)$). Montrer que $(u_n)$ converge si, et seulement si : $u_0 \in A$.

7. Déduire des questions précédentes le comportement de $(u_n)$ suivant la valeur de $u_0$.

8. En se ramenant à la dérivée de $f$, retrouver que la suite $(u_n)$ converge si, et seulement si, elle est stationnaire.