

Feuille d'exercices n°8 : Équations différentielles

Exercice 1 [Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (sur $\mathbb{R}$)]

1. $y' + 3y = x^2 e^{-x} : S = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-3x} + \frac{2x^2 - 2x + 1}{4} e^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$; Cauchy : $\lambda = \frac{3}{4}$;
2. $y' + y = \cos(x) + \sin(x) : S = \{x \mapsto \lambda e^{-x} + \sin(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$; Cauchy : $\lambda = 1$;
3. $y' - \frac{3x}{x^2+1}y = \sqrt{x^2+1} - x : S = \{x \mapsto \lambda(1+x^2)^{3/2} + \text{Arctan}(x)(1+x^2)^{3/2} + (1+x^2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$; Cauchy : $\lambda = 0$;
4. $(1+x^2)y' + xy = x^3 : S = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2-2}{3} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$; Cauchy : $\lambda = \frac{5}{3}$;
5. $(1+e^{-x})y' - y = 1 : S = \{x \mapsto \lambda(1+e^x) - 1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$; Cauchy : $\lambda = 1$;
6. $y' - y = \frac{1}{1+e^{2x}} : S = \{x \mapsto \lambda e^x - 1 - \exp(x) \cdot \text{Arctan}(\exp(x)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$; Cauchy : $\lambda = 2 + \pi/4$.

Exercice 2 [Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (avec intervalle)]

1. $2xy' - 3y = x^2 : S = \{x \mapsto \lambda x^{3/2} + x^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$;
2. $(x-1)y' - 2y = (x-1)^3 : S = \{x \mapsto \lambda(x-1)^2 + x(x-1)^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$;
3. $\sqrt{1-x^2}y' - y = 2 : S = \{x \mapsto \lambda \exp(\text{Arcsin}(x)) - 2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$;
4. $xy' - 2y = x^5 \sin(x) : S = \{x \mapsto \lambda x^2 + (-x^4 + 2x^2)\cos(x) + 2x^3 \sin(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$;
5. $y' + \tan(x)y = \sin(2x) : S = \{x \mapsto \lambda \cos(x) - 2\cos^2(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$;
6. $x(x-2)y' - 2y = (x-1)(x-3) : S = \left\{ x \mapsto \lambda \frac{x-2}{x} + x - \frac{3}{2} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 3 [Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (avec recollement)]

1. $xy' - 2y = 2x^4 : S_+ = \{x \mapsto \lambda x^2 + x^4 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $S_- = \{x \mapsto \mu x^2 + x^4 \mid \mu \in \mathbb{R}\}$; tout recollement est solution :

$$S = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \lambda x^2 + x^4 & \text{si } x \geq 0 \\ \mu x^2 + x^4 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $x(x^2+1)y' - (x^2-1)y = -2x : S_+ = \left\{ x \mapsto \lambda \frac{1+x^2}{x} - x \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ et $S_- = \left\{ x \mapsto \mu \frac{1+x^2}{x} - x \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}$; recollement continu impose $\lambda = \mu = 0$, qui est alors dérivable :

$$S = \{x \mapsto -x\}.$$

3. $x^2y' - y = (x^2-1)e^x : S_+ = \{x \mapsto \lambda \exp(-1/x) + \exp(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $S_- = \{x \mapsto \mu \exp(-1/x) + \exp(x) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$; recollement continu : $\mu = 0$; tous ces recollements sont dérivables en 0 (dérivée 1) :

$$S = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \lambda \exp(-1/x) + \exp(x) & \text{si } x > 0 \\ \exp(x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. $(2x - x^2)y' + (x - 1)y = x$: on coupe $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ en $I_1 =]-\infty; 0[$, $I_2 =]0; 2[$ et $I_3 =]2; +\infty[$. On a : $S_1 = \{x \mapsto \lambda\sqrt{x^2 - 2x} + x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{x \mapsto \mu\sqrt{2x - x^2} + x \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ et $S_3 = \{x \mapsto \gamma\sqrt{x^2 - 2x} + x \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$; tous les recollements sont continus ; dérivable pour $\lambda = \mu = \gamma = 0$:

$$S = \{x \mapsto x\}.$$

Exercice 4 [Absence de solution]

1. $xy' = y + x$: $S_+ = \{x \mapsto \lambda x + x \ln(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $S_- = \{x \mapsto \mu x + x \ln(-x) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$; tout recollement est continu ; aucun n'est dérivable (ni à gauche ni à droite, avec tangentes verticales) ;
2. $y' \sin(x) + y \cos(x) = \sin^2(x)$: sur $[-\pi; \pi]$: $S_+ = \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{\sin(x)} + \frac{x}{2\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ et $S_- = \left\{x \mapsto \frac{\mu}{\sin(x)} + \frac{x}{2\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{2} \mid \mu \in \mathbb{R}\right\}$; recollement en 0 impose $\lambda = \mu = 0$. Mais impossible d'avoir une limite finie en π .

Exercice 5 [Équations différentielles linéaires d'ordre 2]

1. $y'' - 4y' + 4y = 0$: $X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$ donc $S = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$; Cauchy : $\lambda = -3$ et $\mu = 1$;
2. $y'' - 2y' - 3y = e^{-x} \cos(x)$: $X^2 - 2X - 3 = (X + 1)(X - 3)$; $S = \{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{3x} - \frac{\cos(x) + 4\sin(x)}{17} e^{-x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$; Cauchy : $\lambda = 1/2$ et $\mu = 19/34$;
3. $y'' - 6y' + 8y = 16x^2$: $X^2 - 6X + 8 = (X - 4)(X - 2)$; $S = \{x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{4x} + 2x^2 + 3x + \frac{7}{4} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$; Cauchy : $\lambda = -1/2$ et $\mu = -1/4$;
4. $y'' + y = \sin(x) + \sin^2(x)$: $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$; $S_{\mathbb{C}} = \{x \mapsto \lambda e^{ix} + \mu e^{-ix} + 1 + \frac{\cos(2x)}{3} - \frac{x}{2} \cos(x) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$ et $S_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + 1 + \frac{\cos(2x)}{3} - \frac{x}{2} \cos(x) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$; Cauchy : $\lambda = -1/6 - 3i/4$ et $\mu = -1/6 + 3i/4$ (version $\mathbb{C}$) ou $\lambda = -1/3$ et $\mu = 3/2$ (version $\mathbb{R}$) ;
5. $y'' - 2y' + y = \cos(2x)$: $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$; $S = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x - \frac{3\cos(2x) + 4\sin(2x)}{25} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$; Cauchy : $\lambda = 1/5$ et $\mu = 28/25$;
6. $y'' + 4y' + 5y = \sin(x)e^{-2x}$: $X^2 + 4X + 5 = (X - (-2 - i))(X - (-2 + i))$; $S_{\mathbb{C}} = \{x \mapsto \lambda e^{(-2+i)x} + \mu e^{(-2-i)x} - \frac{x \cos(x)}{2} e^{-2x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$ et $S_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto (\lambda \cos(x) + \mu \sin(x))e^{-2x} - \frac{x \cos(x)}{2} e^{-2x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$; Cauchy : $\lambda = 1/2 - 7i/4$ et $\mu = 1/2 + 7i/4$ (version $\mathbb{C}$) ou $\lambda = 1$ et $\mu = 7/2$ (version $\mathbb{R}$) ;
7. $y'' - y' + (1 + i)y = 0$: $X^2 - X + (1 + i) = (X - i)(X - (1 - i))$; $S = \{x \mapsto \lambda e^{ix} + \mu e^{(1-i)x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$; Cauchy : $\lambda = (2 - i)/5$ et $\mu = (3 + i)/5$;
8. $y'' - (1 - i)y' - 2(1 + i)y = 0$: $X^2 - (1 - i)X - 2(1 + i) = (X - 2)(X - (-1 - i))$; $S = \{x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{(-1-i)x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$; Cauchy : $\lambda = (7 + i)/10$ et $\mu = (3 - i)/10$.

Exercice 6 [Recherche des solutions particulières]

1. a. On pose $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$: y solution $\Leftrightarrow y'' + 2y' = x^2 - x \Leftrightarrow 6ax^2 + (6a + 4b)x + (2b + 2c) = x^2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 1 \\ 6a + 4b = -1 \\ 2b + 2c = 0 \end{cases}$ donc $x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ est solution (c'est l'unique solution polynomiale de degré au plus 3).

- b. Par superposition, il suffit de résoudre $y'' + 2y' = 2\text{ch}(x) = e^x + e^{-x}$, donc il suffit de résoudre $y'' + 2y' = e^x$ et $y'' + 2y' = e^{-x}$ (par superposition) :

$$S = \left\{ x \mapsto \lambda + \mu e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{e^x}{3} - e^{-x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\}$$

2. a. On injecte : $a = -1/2$ et $b = -1$ est l'unique solution.

b. $S = \left\{ x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} + \frac{-x^2 - 2x}{2} e^x \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\}$

Exercice 7 [Systèmes d'équations différentielles]

1. $\begin{cases} y' = z + x^2 \\ z' = y - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'' = z' + 2x = y + 2x - x^2 \\ z = y' - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda e^x + \mu e^{-x} + x^2 - 2x + 2 \\ z = \lambda e^x - \mu e^{-x} - x^2 + 2x - 2 \end{cases}$ et réciproque immédiate :

$$S = \{(x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} + x^2 - 2x + 2, x \mapsto \lambda e^x - \mu e^{-x} - x^2 + 2x - 2) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}.$$

2. $\begin{cases} y' = -6x + z + 1 \\ z' = 6y - 5z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'' = -5z' + 6z - 36x + 6 \\ y = 5z/6 + z'/6 \end{cases}$ et idem :

$$S = \{(x \mapsto \lambda e^{-6x} + \mu e^x + 5x + 13/3, x \mapsto -6\lambda e^{-6x} + \mu e^x + 6x + 4) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}.$$

3. $\begin{cases} y' = y + 8z + e^x \\ z' = 2y + z + e^{-3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' + 2z' = 5y + 10z + e^x + 2e^{-3x} = 5(y + 2z) + e^x + 2e^{-3x} \\ y' - 2z' = -3y + 6z + e^x - 2e^{-3x} = -3(y - 2z) + e^x - 2e^{-3x} \end{cases}$
- $$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z = \lambda e^{5x} - \frac{e^x + e^{-3x}}{4} \\ y - 2z = \mu e^{-3x} + \frac{e^{-x}}{2} - 2xe^{-3x} \end{cases}$$

$$S = \left\{ (x \mapsto \frac{\lambda}{2}e^{5x} + \frac{\mu}{2}e^{-3x} + \frac{e^x + (-1 - 8x)e^{-3x}}{8}, x \mapsto \frac{\lambda}{4}e^{5x} - \frac{\mu}{4}e^{-3x} + \frac{-3e^x + (-1 + 8x)e^{-3x}}{16}) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \left\{ (x \mapsto 2\lambda e^{5x} + 2\mu e^{-3x} + \frac{e^x + (-1 - 8x)e^{-3x}}{8}, x \mapsto \lambda e^{5x} - \mu e^{-3x} + \frac{-3e^x + (-1 + 8x)e^{-3x}}{16}) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\}$$

Exercice 8 [Équation fonctionnelle 1]

Analyse-synthèse :

- Analyse : on dérive l'égalité par rapport à x puis par rapport à y :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f''(x + y) = f'(x)f'(y)$$

puis $y = 0$: $a = f'(0)$ donne $f'' = af'$ puis $f' : x \mapsto \lambda e^{ax} = ae^{ax}$ (comme $\lambda = f'(0) = a$) puis $f : x \mapsto e^{ax} + c$ ($c \in \mathbb{R}$) ;

- Synthèse : $c = 0$

donc $S = \{x \mapsto e^{ax} \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 9 [Équation fonctionnelle 2]

Analyse-synthèse :

- Analyse : on dérive l'égalité par rapport à x puis par rapport à y :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, f'(xy) + yx f''(xy) = 0$$

puis $y = 1$: $f''(x) + f'(x)/x = 0$ donc $f' : x \mapsto a/x$ puis $f : x \mapsto a \ln(x) + c$ ($c \in \mathbb{R}$)

- Synthèse : $c = 0$

donc $S = \{x \mapsto a \ln(x) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 10 [Équation fonctionnelle 3]

Analyse-synthèse :

- Analyse : on dérive :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$$

d'où $f : x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x)$

- Synthèse : $a = b$

donc $S = \{x \mapsto a(\cos(x) + \sin(x)) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 11 [Équation différentielle non linéaire]

$$1. y' + ay + by^2 = 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{y}\right)' + a\frac{1}{y} = -b$$

$$2. y' + ay + by^2 = c = y'_0 + ay_0 + by_0^2 \Leftrightarrow (y - y_0)' + (a + 2y_0)(y - y_0) + b(y - y_0)^2 = 0$$

$$3. \tan = y_0 \text{ est solution : } z = \frac{1}{y - \tan} \text{ solution de } y' + 2\tan(x)y = -1 \text{ donc } z : x \mapsto \lambda \cos^2(x) - \cos(x) \cdot \sin(x)$$

puis $y = \frac{1}{z} + y_0$ donc :

$$S = \left\{ x \mapsto \frac{1}{\lambda \cos^2(x) - \cos(x) \sin(x)} + \tan(x) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$