Feuille d'exercices n^{o}18 : Applications linéaires

Exercice 1 [Applications linéaires ou non]

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 0)$;
2. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 1)$;
3. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x, x, x)$;
4. $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X],\ P \mapsto P(1) + P'(1) + P''$;
5. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f \mapsto f' - 3f$;
6. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f \mapsto 2f \cdot f'$;
7. $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)$;
8. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)$;
9. $\mathbb{R}^\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^\mathbb{N},\ (u_n) \mapsto (u_{n+1} - u_n)$;
10. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto M^T$;
11. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto A \cdot M$ (pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée).

Pour toutes les applications linéaires ci-dessus, donner le noyau et l'image (on essaiera de les écrire simplement, ou d'en donner une base si possible).

Exercice 2 [Morphisme d'évaluation]

Soit Ω un ensemble, E un espace vectoriel, et $a \in \Omega$. Montrer que l'application

$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{F}(\Omega, E) & \to & E \\ f & \mapsto & f(a) \end{array} \right.$$

est une application linéaire de $\mathcal{F}(\Omega, E)$ dans E, et déterminer son image et son noyau.

Exercice 3 [Inclusion d'espaces images]

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si A, B sont deux sev de E, montrer que :

$$f(A) \subset f(B) \Leftrightarrow A + \mathrm{Ker}f \subset B + \mathrm{Ker}f.$$

Exercice 4 [Image et noyau d'une composée]

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que :

1. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\mathrm{Ker}g)$;
2. $\mathrm{Ker}(g \circ f) \supset \mathrm{Ker}f$;
3. $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(\mathrm{Im}f)$;
4. $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}g$;
5. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}f \Leftrightarrow \mathrm{Ker}g \cap \mathrm{Im}f = \{0\}$;
6. $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}g \Leftrightarrow \mathrm{Ker}g + \mathrm{Im}f = F$.

Exercice 5 [Image et noyau d'un endomorphisme]

Soient E un espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

1. $\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}f^2$;
2. $E = \mathrm{Im}f + \mathrm{Ker}f \Leftrightarrow \mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2$.

Exercice 6 [Endomorphismes qui commutent]

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer alors que $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$ sont stables par g.

Plus généralement, montrer que $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}g$ sont stables par tout endomorphisme de la forme $P(g)$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 7 [Images et noyaux itérés]

Soient E un espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$. Comparer :

1. $\mathrm{Ker} f^k$ et $\mathrm{Ker} f^{k+1}$;
2. $\mathrm{Im} f^k$ et $\mathrm{Im} f^{k+1}$.

Exercice 8 [Caractérisation des homothéties]

Soit E un espace vectoriel. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie si, et seulement si, pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée.

Exercice 9 [Composée de projecteurs]

Soient p, q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que :

1. $\mathrm{Im} p = \mathrm{Im} q \Leftrightarrow (p \circ q = q$ et $q \circ p = p)$;
2. $\mathrm{Ker} p = \mathrm{Ker} q \Leftrightarrow (p \circ q = p$ et $q \circ p = q)$.

Exercice 10 [Somme de projecteurs]

Soient p, q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que $p+q$ est un projecteur si, et seulement si : $p \circ q = q \circ p = 0$, et qu'alors $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im} p \oplus \mathrm{Im} q$ et $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker} p \cap \mathrm{Ker} q$.

Exercice 11 [Inversibilité unilatérale]

Soient E un espace vectoriel, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{id}$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} g$.
3. Caractériser $g \circ f$.
4. Donner un exemple pour lequel $g \neq f^{-1}$.

Exercice 12 [Composition double]

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g \circ f = f$.

1. Montrer que $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} g$ sont supplémentaires dans E.
2. Montrer que $f\left(\mathrm{Im} g\right) = \mathrm{Im} f$.

Exercice 13 [Supplémentaire commun à deux hyperplans]

Soient F, G deux hyperplans d'un espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G \neq E$, et en déduire qu'il existe un supplémentaire commun à F et G dans E.

Exercice 14 [Détermination d'une forme linéaire]

Donner l'expression générale de l'unique forme linéaire $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ telle que :

$$f(1,1,1) = 0,\ f(2,0,1) = 1 \text{ et } f(1,2,3) = 4$$

et donner une base de son noyau.

Exercice 15 [Forme linéaire sur les polynômes]

Soit $a \in \mathbb{K}$. On considère $\varphi \in (\mathbb{K}[X])^*$ non nulle telle que : $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \varphi((X-a)P) = 0$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \varphi(P) = \lambda P(a)$.