Feuille d'exercices n^{o}17 : Arithmétique dans les entiers

Exercice 1 [Quelques divisibilités]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

1. $7 | 3^{2n+1} + 2^{n+2}$;
2. $16 | 5^n - 1 - 4n$;
3. $6 | n(n+2)(7n-5)$.

Exercice 2 [Divisibilités ... ou pas !]
Déterminer pour quels entiers $n \in \mathbb{Z}$:

1. n divise $n^2 + 1$;
2. $n+1$ divise $n^2 + 1$;
3. $n - 4$ divise $3n - 17$;
4. $n - 1$ divise $2n^2 - 2n + 4$.

Exercice 3 [Nombres non premiers consécutifs]
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Montrer qu'il n'existe aucun nombre premier entre $n! + 2$ et $n! + n$.

Exercice 4 [Calculs de pgcd]
Calculer les pgcds des couples d'entiers suivants :

1. $(94, 267)$;
2. $(106, 317)$;
3. $(82, 519)$;
4. $(9348, 1640)$;
5. $(25, 38)$;
6. $(19, 54)$;
7. $(18, 29)$;
8. $(51, 148)$;
9. $(293, 107)$.

Exercice 5 [Couples d'entiers premiers entre eux]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les couples suivants sont constitués d'entiers premiers entre eux :

1. $(n! + 1, (n+1)! + 1)$;
2. $(3^{n+1} + 2^{n+1}, 3^n + 2^n)$.

Exercice 6 [Famille d'entiers deux-à-deux premiers entre eux]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $i \in \{1, \dots, n+1\}$, on pose : $a_i = i \cdot n! + 1$.
Montrer que les a_i sont deux-à-deux premiers entre eux.

Exercice 7 [Divisions dans les puissances]
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $m, n \in \mathbb{N}$. Montrer que, si m divise n, alors $a^m - b^m$ divise $a^n - b^n$.

Exercice 8 [Un critère de double divisibilité]
Soient $x, y \in \mathbb{N}$. Montrer que : $7 | x$ et $7 | y \Leftrightarrow 7 | x^2 + y^2$.

Exercice 9 [Critères usuels de divisibilité]
On considère un entier $n \in \mathbb{N}$, dont on note $a_0, \dots a_m$ les chiffres dans l'écriture décimale.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a_0 pour que n soit un multiple de 2, 5 ou 10, et retrouver les critères de divisibilités associés.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner le reste de la division euclidienne de 10^k par 3 et par 9. Retrouver ainsi le critère de divisibilité par 3 et par 9.
3. Donner le reste de la division euclidienne de 10^{2k} par 11, et de 10^{3k} par 37. En déduire des critères de divisibilité pour ces deux nombres.

Exercice 10 [Amélioration du critère de divisibilité par 37]

Avec les mêmes notations, on associe au nombre n les entiers à trois chiffres $\overline{a_2a_1a_0}$, $\overline{a_5a_4a_3}$, etc. qu'on additionne, et on répète ce processus pour former un entier N à trois chiffres. On effectue la même transformation au nombre $3 \times N$, ce qui donne un entier à trois chiffres $\overline{abc}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que n soit un multiple de 37.

Exercice 11 [Un autre critère de divisibilité]

1. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 10^n par 11.
2. En déduire un critère de divisibilité par 11 faisant intervenir les chiffres de l'écriture décimale.

Exercice 12 [Équations d'entiers]

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations en x, y suivantes :

1. $7x = 4y^3$;
2. $xy = 3x + 2y$;
3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$;
4. $17x + 11y = a$ $(a \in \mathbb{Z})$;
5. $\left\{ \begin{array}{rcl} x \wedge y & = & 3 \\ x \vee y & = & 135 \end{array} \right.$;
6. $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 100 \\ x \wedge y & = & 10 \end{array} \right.$ (dans $\mathbb{N}^2$).

Exercice 13 [Nombre et de diviseurs]

Notons $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}$ la décomposition de $n \in \mathbb{N}^*$ en produit de facteurs premiers.

Déterminer le nombre de diviseurs positifs de n ainsi que leur somme en fonction des p_i et des a_i.

Exercice 14 [Produit des diviseurs]

Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ qui sont égaux au produit de leurs diviseurs positifs non triviaux.

Exercice 15 [Sommes des diviseurs et nombres de Mersenne]

Pour entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n = 2^n - 1$.

1. Montrer que, si M_n est premier, alors n est premier. Que penser de la réciproque ?
2. On suppose que $p \in \mathbb{N}$ est tel que M_p est premier et on note $N = 2^{p-1}M_p$. Donner les diviseurs de N, et montrer que N est la somme de ses diviseurs positifs stricts.

Exercice 16 [Entiers algébriques]

1. Soit $x \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $x \in \mathbb{Z}$.
2. Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$. On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation : (E) : $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$. Montrer que les solutions de (E) sont soit entières, soit irrationnelles, et retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 17 [Nombres de Fermat]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que, pour $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$, F_n et F_n sont premiers entre eux.

Exercice 18 [Nombre de zéros]

Déterminer le nombre de zéros dans l'écriture décimale de 100!.