Feuille d'exercices n^{o}16 : Continuité et limites

Exercice 1 [Calculs de limites]

Déterminer les limites suivantes si elles existent :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) e^{\cos(x)}$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right)$;
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\sin(x)}$;
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}-2\right)$;
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\sqrt{x+1}\right)-\sin\left(\sqrt{x}\right)$;
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-\lfloor x+\frac{1}{2}\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor}$;
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\lfloor x\rfloor}{x-\lfloor x+\frac{1}{2}\rfloor}$;
8. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\lfloor x\rfloor}{x}$;
9. $\lim\limits_{x\to0} x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$;
10. $\lim\limits_{x\to0} x^2\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$;
11. $\lim\limits_{x\to0} \cos\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 2 [Comportement en l'infini]

Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ bornée telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=l\in\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $l=0$.

Exercice 3 [Prolongements par continuité]

Étudier les prolongements par continuité éventuels des fonctions suivantes aux bornes de leurs ensembles de définition :

1. $x\mapsto \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;
2. $x\mapsto \frac{1}{x-3}-\frac{4}{x^2-2x-3}$;
3. $x\mapsto \frac{\ln(4x^2-1)}{\ln(2x-1)}$;
4. $x\mapsto e^{\frac{1}{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$;
5. $x\mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$;
6. $x\mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$;
7. $x\mapsto x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$;
8. $x\mapsto \sin(1+x)\ln|1+x|$;
9. $x\mapsto \frac{\tan(2x)}{\sin(3x)}$;
10. $x\mapsto \frac{\tan(2x)}{\sin(\pi x)}$.

Exercice 4 [Fonction continue périodique]

Montrer qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ continue périodique est bornée. Montrer que le résultat est faux si l'on retire l'une des trois hypothèses.

Exercice 5 [Une fonction continue ?]

Étudier la continuité de la fonction $x\mapsto\lfloor x\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$.

Exercice 6 [Continuité et valeur absolue]

Soient f,g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x\in I,\ |f(x)|=|g(x)|\neq0$. Montrer que $f=g$ ou $f=-g$.

Exercice 7 [Monotonie et continuité]

Soit $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ croissante telle que $x\mapsto\frac{f(x)}{x}$ est décroissante : montrer que f est continue.

Exercice 8 [Une fonction affine]

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right).$$

On souhaite montrer que f est affine (par une méthode un peu originale) :

1. On suppose que f vérifie $f(0)=f(1)$: montrer que f est périodique.
2. On suppose de plus que $f(0)=0$. Montrer que f est nulle. On pourra commencer par justifier que f est bornée.
3. Traiter le cas général en se ramenant au cas où $f(0)=f(1)=0$.

Exercice 9 [Limite et valeur absolue]

Soit f continue telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$.

Exercice 10 [Composée bornée de fonctions continues]

Soient f, g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Montrer que, si f ou g est bornée, alors $g \circ f$ est bornée.

Exercice 11 [Fonction coercive]

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global.

Exercice 12 [Continuité et densité]

Montrer que deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur $\mathbb{Q}$ sont égales. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est-elle continue ?

Exercice 13 [Équations fonctionnelles]

Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ solution des équations fonctionnelles suivantes, en précisant dans chaque cas en quels points on utilise la continuité de f :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = f(x)$;
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x)$;
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x)$;
4. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$;
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x)f(y)$;
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$.

Exercice 14 [Existence de point fixe]

Soit f une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe si :

1. si $f : [a,b] \to [a,b]$;
2. si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ avec $[a,b] \subset f([a,b])$;
3. si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ décroissante (et montrer que son point fixe est unique) ;
4. si $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}^+$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l < 1$;
5. si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et que f^k (pour $k \in \mathbb{N}^*$) a un point fixe.

Exercice 15 [Formules de la moyenne]

Soient f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$, avec g de signe constant. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(c) \cdot \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 16 [Applications contractantes et points fixes]

Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **contractante** s'il existe $k \in]0;1[$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leqslant k \cdot |x - y|.$$

1. Montrer qu'une application contractante est continue.
2. Montrer que, si une application contractante possède un point fixe, celui-ci est unique.
3. Soit f contractante. En étudiant les limites de $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ en $\pm\infty$, montrer que f possède un unique point fixe.
4. En notant l ce point fixe, montrer que tout suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l. Plus précisément, majorer $|u_n - l|$ en fonction de n, u_0, l et k.