Feuille d'exercices n^{o}15 : Espaces vectoriels

Exercice 1 [Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$]

1. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leqslant y\}$: pas un sev car $(0,1)$ appartient mais pas $(0,-1)$ (stable par addition, mais pas par multiplication par des réels négatifs)

2. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y\}$: sev (propriétés vérifiées facilement)

3. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=0\}$: pas un sev car $(0,1)$ et $(1,0)$ appartiennent mais pas $(1,1)$ (pas stable par addition)

4. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=a\}$: pas un sev si $a\neq 0$ (ni stable par addition ni par produit), mais sev si $a=0$ (propriétés vérifiées facilement).

Exercice 2 [Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$]

1. les suites bornées : sev : la suite nulle est bornée, et stable par combinaisons linéaires par l'inégalité triangulaire

2. les suites convergentes : sev : la suite nulle converge, et stable par combinaison linéaire par opération sur les limites ;

3. les suites ayant une limite : pas un sev : pas stable par addition (prendre $(u_n)=(-n+(-1)^n)$ et $(v_n)=(n)$ qui ont une limite mais pas leur somme) ;

4. les suites tendant vers a (pour $a\in\mathbb{R}$ fixé) : il faut $a=0$ (sinon on n'a pas la suite nulle) et alors c'est un sev (stabilité découle des opérations sur les limites) ;

5. les suites géométriques : pas un sev : si les raisons sont différentes, la somme (ou une combinaison linéaire) n'est en général pas géométrique. Par exemple $(u_n)=(1)$ est géométrique de raison 1, et $(v_n)=((-1)^n)$ est géométrique de raison -1 mais leur somme n'est pas géométrique (comme elle s'annule parfois, alors qu'une suite géométrique qui s'annule une fois est alors stationnaire à 0).

6. les suites arithmétiques : sev : la suite nulle est arithmétique de raison 0, et une combinaison linéaire de suites arithmétique est arithmétique (la raison est la combinaison linéaire des raisons)

7. les suites arithmético-géométriques : pas un sev : une suite arithmético-géométrique est de la forme géométrique+constante, et on peut faire des sommes de deux suites géométriques de raisons différentes qui sort de ce cadre

8. les suites linéaires récurrentes d'ordre 2 : pas un seb : ce sont des sommes d'au plus deux suites géométriques, et on peut sortir de ce cadre ;

9. les suites périodiques : sev : la suite nulle est géométrique (tout entier est une période) ; et une combinaison linéaire de deux suites périodique est périodique (pour période on peut prendre le produit des périodes)

10. les suites monotones : pas un sev : les suites $(u_n)=(3n)$ et $(v_n)=(-3n+(-1)^n)$ sont monotones (même strictement) mais pas leur somme.

Exercice 3 [Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$]

1. les fonctions monotones : pas un sev car pas stable par somme : prendre $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$.

2. les fonctions qui s'annulent : pas un sev car pas stable par somme : prendre $x \mapsto x^2$ (qui s'annule en 0) et $x \mapsto 2x+2$ (qui s'annule en -1) alors que leur somme $x \mapsto x^2+2x+2$ ne s'annule pas

3. les fonctions qui s'annulent en a (pour $a \in \mathbb{R}$ fixé) : c'est un sev (et peu importe a) : la fonction nulle s'annule en a, et la stabilité par combinaison linéaire est claire

4. les fonctions paires : sev

5. les fonctions impaires : sev

6. les fonctions périodiques : pas sev car pas stable par somme : on a vu que $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \cos(\sqrt{2}x)$ sont périodiques mais pas leur somme ;

7. les fonctions T-périodiques (pour $T > 0$ fixé) : sev

8. les fonctions f continues telles que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$ (pour $[a, b] \subset \mathbb{R}$ fixé) : sev (découle de la linéarité de l'intégrale)

9. les fonctions f dérivables telles que $f'(a) = 0$ (pour $a \in \mathbb{R}$ fixé) : sev (découle de la linéarité de la dérivation)

Exercice 4 [Et d'autres sous-espaces vectoriels]

1. les matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: sev

2. les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pas un sev (pas la matrice nulle)

3. les matrices non-inversibles : pas un sev : pas stable par somme, car par exemple aucune matrice élémentaire n'est inversible (si $n \geqslant 2$) alors que leurs sommes donnent toutes les matrices (et donc des matrices inversibles)

4. les matrices scalaires : sev

5. les polynômes dont a est de multiplicité m (pour $a \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$ fixés) : pas un sev (problème du polynôme nul ou de $X(X-a)^m$ et $a(X-a)^m$ dont la différence possède a de multiplicité $m+1$ comme racine)

6. les polynômes dont 0 est multiplicité au moins m (pour $m \in \mathbb{N}$ fixé) : sev

7. les polynômes de degré 4 : pas un sev (pas le polynôme nul)

8. les polynômes de degré au moins 4 : pas un sev (pas le polynôme nul)

9. les polynômes de degré au plus 4 : sev

Exercice 5 [Union d'espaces vectoriels]

C'est un sev si, et seulement si, l'un des espaces F ou G est inclus dans l'autre :

- si $F \subset G$: $F \cup G = G$ est un sev ;

- si $G \subset F$: $F \cup G = F$ est un sev ;

- sinon : soit $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$: alors $x, y \in F \cup G$ mais $x + y \notin F \cup G$ car :

- $x+y \notin F$: sinon on aurait $y=(x+y)-x \in F$ (différence de deux éléments de F sev), ce qui est exclus ;
- $x+y \notin G$: sinon on aurait $x=(x+y)-y \in G$ (différence de deux éléments de G sev), ce qui est exclus.

donc $F \cup G$ n'est pas un sev (pas stable par somme)

Exercice 6 [Familles libres et bases dans $\mathbb{R}^3$]

1. $((1,0,1),(1,2,2))$: libre (deux vecteurs non proportionnels à cause d'un 0 présent dans l'un et pas dans l'autre) donc c'est une base de l'espace engendré ;

2. $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$: libre (échelonnée, avec des 0 qui disparaissent d'un vecteur au suivant) donc c'est une base de l'espace engendré ;

3. $((1,2,1),(2,1,-1),(1,-1,-2))$ on peut résoudre le système associé à l'équation $xe_1+ye_2+ze_3=0$ par exemple, ou voir que $e_1+e_3=e_2$: la famille est donc liée, et comme on a une combinaison linéaire nulle dont tous les coefficients sont non nuls, on peut retirer n'importe quel vecteur et préserver l'espace engendré ; il reste alors une famille à deux vecteurs non proportionnels, qui est donc libre, et engendre le même espace : c'est donc une base ;

4. $((1,-1,1),(2,-1,3),(-1,1,-1))$: les vecteurs e_1 et e_3 sont opposés, et c'est la seule relation qu'on peut trouver entre les vecteurs. La famille est liée, et on peut retirer e_1 ou e_3 et préserver l'espace engendré. Les vecteurs restant sont non proportionnels donc forment une famille libre. Et donc on peut prendre (e_1,e_2) ou (e_2,e_3) comme base.

Exercice 7 [Familles libres et bases dans d'autres ev]

1. $\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$: soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1 & = & 0\\ \lambda_1+\lambda_2 & = & 0\\ -\lambda_2+\lambda_3 & = & 0\\ -\lambda_1 & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

donc la famille considérée est libre.

2. $(x\mapsto \sin(x), x\mapsto\sin(2x), x\mapsto\sin(3x))$: posons f_1,f_2,f_3 ces trois fonctions. Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1f_1+\lambda_2f_2+\lambda_3f_3=0$. Alors en évaluant en $\pi/2$, $\pi/4$ et $3\pi/4$ (par exemple, mais on pourrait faire en d'autres points) on déduit :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1-\lambda_3 & = & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_1+\lambda_2+\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_3 & = & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_1-\lambda_2+\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_3 & = & 0\end{array}\right.$$

qui donne $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ donc la famille est libre.

Exercice 8 [Bases d'espaces vectoriels]

1. $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,|\, x+y+z+t=x+2y+3z+4t=0\}$: on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& 0\\ x+2y+3z+4t &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& 0\\ y+2z+3t &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& z+2t\\ y &=& -2z-3t\end{array}\right.$$

ce qui donne comme ensemble :

$\{(z+2t,-2z-3t,z,t)\,|\,z,t\in\mathbb{R}\}=\{z(1,-2,1,0)+t(2,-3,0,1)\,|\,z,t\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\left((1,-2,1,0),(2,-3,0,1)\right)$

Et on a bien une base parce que les deux vecteurs sont non proportionnels (des 0 pas au même endroit), donc forment une famille libre, qui est donc une base de l'espace vectoriel considéré.

2. $\{y\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\,|\,y''=4y'-3y\}$: on résout l'équation différentielle $y''-4y'+3y=0$: les solutions sont les fonctions de la forme :
$$x\mapsto \lambda e^x+\mu e^{3x},\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$
donc l'ensemble est :
$$\{x\mapsto \lambda e^x+\mu e^{3x}\,|\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(x\mapsto e^x, x\mapsto e^{3x})$$
et la famille génératrice utilisée est bien libre (non proportionnelles comme l'une est négligeable devant l'autre par exemple) donc c'est une base.

3. $\{(u_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=4u_{n+1}-3u_n\}$: on a des suites linéaires récurrentes d'ordre 2, qui sont exactement les suites de la forme :
$$u_n=\lambda+\mu 3^n,\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$
donc l'ensemble est :
$$\mathrm{Vect}((1),(3^n))$$
et la famille génératrice utilisée est bien libre (même argument) donc c'est une base.

4. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$:

   - pour $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: une matrice antisymétrique est entièrement déterminée par ses coefficients au-dessus (strictement) de la diagonale, et on a ainsi :
   $$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})=\mathrm{Vect}\left((E_{i,j}-E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}\right)$$
   qui est libre en regardant coefficient par coefficient la matrice $\sum_{i<j}a_{i,j}(E_{i,j}-E_{j,i})$ (elle est bien nulle si, et seulement si, tous les $a_{i,j}$ sont nuls).
   - pour $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: une matrice symétrique est entièrement déterminée par ses coefficients au-dessus (au sens large) de la diagonale, et on a ainsi :
   $$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})=\mathrm{Vect}\left((E_{i,j}+E_{j,i})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\right)$$
   qui est libre par les mêmes arguments que ci-dessus.

5. $\{A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,|\,a_{1,1}+a_{2,2}=0\}$: on a directement comme ensemble :
$$\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\,|\,a,b,c\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right).$$
qui est une base (en regardant coefficient par coefficient une combinaison linéaire, comme pour $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9 [Famille de fonctions trigonométriques]

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \text{cos} + \lambda_2 \text{idcos} + \mu_1 \text{sin} + \mu_2 \text{idsin} = 0$. On évalue en 0 : ce qui donne $\lambda_1 = 0$ En réinjectant et en évaluant en π on déduit $\lambda_2 = 0$. En dérivant et en évaluant en 0 on trouve $\mu_1 = 0$. En évaluant en $\pi/2$ on trouve $\mu_2 = 0$. Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0$: la famille est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Posons f_1, f_2, f_3 respectivement $x \mapsto \cos(x+a)$, $x \mapsto \cos(x+b)$ et $x \mapsto \cos(x+c)$. Alors :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \cos(x+a) + \lambda_2 \cos(x+b) + \lambda_3 \cos(x+c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda_1 \cos(a) + \lambda_2 \cos(b) + \lambda_3 \cos(c)) \cos(x) - (\lambda_1 \sin(a) + \lambda_2 \sin(b) + \lambda_3 \sin(c)) \sin(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 \cos(a) + \lambda_2 \cos(b) + \lambda_3 \cos(c) & = & 0 \\ \lambda_1 \sin(a) + \lambda_2 \sin(b) + \lambda_3 \sin(c) & = & 0 \end{array} \right.$$

(en utilisant que la famille $(\cos, \sin)$ est libre, ce qu'on peut montrer directement en évaluant une combinaison linéaire nulle en 0 et $\pi/2$, ou voir qu'elles sont non proportionnelles, ou encore la voir comme une sous-famille de la première famille libre de cet exercice).

Mais le système $\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 \cos(a) + \lambda_2 \cos(b) + \lambda_3 \cos(c) & = & 0 \\ \lambda_1 \sin(a) + \lambda_2 \sin(b) + \lambda_3 \sin(c) & = & 0 \end{array} \right.$ est un système linéaire homogène à 3 inconnues, et 2 équations : il admet une infinité de solution, et en particulier une solution non nulle. Donc on peut trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous nuls tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$: la famille (f_1, f_2, f_3) est donc liée (et ce peu importe le choix de a, b, c).

Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \text{sin} + \mu \text{cos} + \nu(x \mapsto \sin(2x)) = 0$. En évaluant en 0 on trouve $\mu = 0$. En évaluant en $\pi/2$ on déduit $\lambda = 0$. Puis en évaluant en $\pi/4$ on trouve $\nu = 0$. Donc $\lambda = \mu = \nu = 0$: la famille est libre.

Exercice 10 [Altération d'une famille libre 1]

Soient λ, μ, ν tels que $\lambda(y+z) + \mu(z+x) + \nu(x+y) = 0$.

Alors : $(\lambda+\mu)z + (\lambda+\nu)y + (\mu+\nu)x = 0$.

Par liberté de (x, y, z) : $\lambda + \mu = \lambda + \nu = \mu + \nu = 0$. Et en résolvant le système qui apparaît on trouve $\lambda = \mu = \nu = 0$.

Donc la famille $(y+x, z+x, x+y)$ est libre.

Exercice 11 [Altération d'une famille libre 2]

Montrons qu'elle est libre si, et seulement si, $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq -1$:

- si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq -1$: pour simplifier posons $\alpha \neq -1$ cette somme .

  Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i + y) = 0$. Par définition de y, on a donc :

  $$\sum_{i=1}^n \lambda_i \left(x_i + \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) + \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_j \right) x_j \right) = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i + \alpha_i \sum_{j=1}^n \lambda_j \right) x_i = 0$$

  et par liberté de la famille des (x_i), en posant $\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j$:

  $$\forall i \in [\![1; n]\!],\ \lambda_i + \lambda \alpha_i = 0$$

  En sommant toutes ces égalités, on déduit :

  $$\lambda + \alpha \lambda = 0$$

  donc $\lambda = 0$ (comme $\alpha \neq -1$) puis :

  $$\forall i \in [\![1; n]\!],\ \lambda_i = -\lambda \alpha_i = 0$$

  donc la famille est libre.

- si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = -1$: on veut montrer qu'on peut trouver des λ_i non tous nuls, de somme λ, tels que :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ \lambda_i + \lambda\alpha_i = 0$$

et $\lambda_i = -\alpha_i$ pour tout i convient. Qui sont bien non tous nuls car leur somme vaut $-\alpha = 1 \neq 0$.

Exercice 12 [Familles libres sur les fonctions]

On pourrait procéder par récurrence sur n. On va le faire de manière directe :

- pour les f_i : on travaille avec les ordres de grandeur. Quitte à renuméroter les μ_i, on suppose que $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$. Et alors chaque f_i est un $\mathrm{o}(f_j)$ pour $j > i$.

  Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum \lambda_i f_i = 0$. Alors :

  $$\lambda_n f_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i = \mathrm{o}(f_n)$$

  donc $\lambda_n = \mathrm{o}(1)$: donc $\lambda_n = 0$.

  On répète ainsi de suite pour montrer que tous les λ_i sont nuls. On verra d'autres rédactions plus convaincantes plus tard (par l'absurde, ou par récurrence Amora).

- pour les g_i : on peut invoquer un argument de dérivabilité : considérons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\sum \lambda_i g_i = 0$. Fixons $i \in [\![1;n]\!]$ et montrons que $\lambda_i = 0$.

  On a : $\lambda_i g_i = -\sum_{j\neq i} \lambda_j g_j$. La fonction g_i n'est pas dérivable en μ_i, à l'inverse des g_j pour $j \neq i$ (comme les μ_i sont deux-à-deux distincts). Donc, par combinaison linéaire, $\lambda_i g_i$ est dérivable en μ_i, ce qui impose que $\lambda_i = 0$ comme g_i n'est pas dérivable en μ_i.

  Donc tous les λ_i sont nuls : la famille est libre.

Exercice 13 [Base sur les suites périodiques]

On fixe $p \in \mathbb{N}^*$:

1. On peut prendre la famille $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ définie par :

$$\forall k \in [\![0;p-1]\!],\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv k\ [p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. Notons déjà que, si une suite géométrique est p-périodique, sa raison est une racine p-ème de l'unité. Par linéarité, il suffirait de considérer les suites géométriques de premier terme 1, c'est-à-dire qu'on peut considérer les suites $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ définies par :

$$\forall k \in [\![0;p-1]\!],\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_k(n) = e^{2ik\pi/p^n} = \omega^{kn}.$$

où $\omega = e^{2i\pi/p}$.

Le côté libre et générateur se montre simultanément, en montrant l'inversibilité de la matrice $A = (\omega^{ij})_{0\leqslant i,j\leqslant p-1}$.

Pour son inversibilité, montrons que $AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$. Soit $X = (x_i)$. Si $AX = 0$, alors pour tout $i \in [\![0;p-1]\!]$ on a :

$$\sum_{j=0}^{p-1} x_j (\omega^i)^j = 0$$

donc les ω^i sont p racines distinctes du polynôme $P = \sum_{j=0}^{p-1} x_j X^j$, qui est de degré au plus $p-1$: il est donc nul. Donc tous les x_j sont nuls. Ce qui prouve l'inversibilité de A.

Exercice 14 [Somme et intersection d'espaces vectoriels]

On procède par double implication :

- si $F = G$: alors $F + G = \{x + y \,|\, x \in F, y \in G\} = \{x + y \,|\, x, y \in F\} = F = G = F \cap G$;
- si $F \cap G = F + G$:
  - $F = \{x + y \,|\, x \in F, y = 0\} \subset \{x + y \,|\, x \in F, y \in G\} = F + G = F \cap G \subset G$ donc $F \subset G$;
  - démonstration analogue pour avoir $G \subset F$

  et donc $F = G$ par double inclusion.

Soient F, G deux sev de E. Montrer que : $F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$.

Exercice 15 [Espaces de fonctions supplémentaires]

Considérons $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrons séparément que f s'écrit de manière unique comme $f_1 + g_1$ et $f_2 + g_2$ pour $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2$ et $g_1, g_2 \in G$

- pour la première écriture : procédons par analyse–synthèse :
  - analyse : posons $f = f_1 + g_1$ pour $f_1 \in F_1$ et $g_1 \in G$. Notons $g_1 = \lambda \mathrm{id}$ (par définition de G). En évaluant en 0 et en 1 on trouve :

$$f(0) = f_1(0) \text{ et } f(1) = f_1(1) + \lambda$$

  et comme $f_1 \in F_1$ on déduit $f_1(1) = f_1(0)$ donc nécessairement $\lambda = f(1) - f(0)$ et ainsi :

$$g_1 = (f(1) - f(0))\mathrm{id} \text{ et } f_1 = f - (f(1) - f(0))\mathrm{id}.$$

  - synthèse : il est clair que de telles fonctions conviennent.

  Et ainsi f s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de G, ce qui prouve bien que F_1 et G sont supplémentaires.
- pour la seconde : on procède de même. On trouve que l'unique écriture est :

$$f = \underbrace{\left(f - 2\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{id}\right)}_{\in F_2} + \underbrace{\left(2\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{id}\right)}_{\in G}.$$

Exercice 16 [Espaces de polynômes supplémentaires]

Soit $P \in E$. Notons $P = a + bX + cX^2 + dX^3$. Alors :

$$P \in G \Leftrightarrow a + b + c + d = b + 2c + 3d = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & -2c - 3d \\ a & = & c + 2d \end{array} \right. \Leftrightarrow P = c(1 - 2X + X^2) + d(2 - 3X + X^3)$$

donc $G = \mathrm{Vect}(1 - 2X + X^2, 2 - 3X + X^3)$ (qui est une base : deux vecteurs non proportionnels).

Et on aurait $F = \mathrm{Vect}(1, X)$, avec encore une base (la base canonique).

On considère $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $G = \{P \in E \,|\, P(1) = P'(1) = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E, et donner la décomposition correspondante pour $1, X, X^2, X^3$.