Feuille d'exercices n^{o}15 : Espaces vectoriels

Exercice 1 [Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$]

Dire si les ensembles suivants sont ou non des sev de $\mathbb{R}^2$:

1. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x\leqslant y\}$;
2. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x=y\}$;
3. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, xy=0\}$;
4. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x+y=a\}$ (pour $a\in\mathbb{R}$ fixé).

Exercice 2 [Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$]

Dire si les ensembles suivants sont ou non des (sous-)espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

1. les suites bornées ;
2. les suites convergentes ;
3. les suites ayant une limite ;
4. les suites tendant vers a (pour $a\in\mathbb{R}$ fixé) ;
5. les suites géométriques ;
6. les suites arithmétiques ;
7. les suites arithmético-géométriques ;
8. les suites linéaires récurrentes d'ordre 2.
9. les suites périodiques ;
10. les suites monotones.

Exercice 3 [Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$]

Dire si les ensembles suivants sont ou non des (sous-)espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

1. les fonctions monotones ;
2. les fonctions qui s'annulent ;
3. les fonctions qui s'annulent en a (pour $a\in\mathbb{R}$ fixé);
4. les fonctions paires ;
5. les fonctions impaires ;
6. les fonctions périodiques ;
7. les fonctions T-périodiques (pour $T>0$ fixé) ;
8. les fonctions f continues telles que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=0$ (pour $[a,b]\subset\mathbb{R}$ fixé) ;
9. les fonctions f dérivables telles que $f'(a)=0$ (pour $a\in\mathbb{R}$ fixé).

Exercice 4 [Et d'autres sous-espaces vectoriels]

Dire si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

1. les matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
2. les matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
3. les matrices non-inversibles ;
4. les matrices scalaires ;
5. les polynômes dont a est de multiplicité m (pour $a\in\mathbb{C}$ et $m\in\mathbb{N}$ fixés) ;
6. les polynômes dont 0 est multiplicité au moins m (pour $m\in\mathbb{N}$ fixé) ;
7. les polynômes de degré 4 ;
8. les polynômes de degré au moins 4 ;
9. les polynômes de degré au plus 4.

Exercice 5 [Union d'espaces vectoriels]

Soient E un ev et F,G deux sev de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour que $F\cup G$ soit un sev de E.

Exercice 6 [Familles libres et bases dans $\mathbb{R}^3$]

Pour chacune des familles suivantes, dire si elles sont libres ou non et donner une base de l'espace vectoriel engendré :

1. $((1,0,1),(1,2,2))$;
2. $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$;
3. $((1,2,1),(2,1,-1),(1,-1,-2))$;
4. $((1,-1,1),(2,-1,3),(-1,1,-1))$.

Exercice 7 [Familles libres et bases dans d'autres ev]

Montrer que les familles suivantes sont libres :

1. $\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$;
2. $(x\mapsto \sin(x), x\mapsto \sin(2x), x\mapsto \sin(3x))$.

Exercice 8 [Bases d'espaces vectoriels]

Donner des bases aux espaces vectoriels suivants (on ne demande pas de montrer qu'il s'agit d'espaces vectoriels) :

1. $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,x+y+z+t=x+2y+3z+4t=0\}$;
2. $\{y\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\,|\,y''=4y'-3y\}$;
3. $\{(u_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=4u_{n+1}-3u_n\}$;
4. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$;
5. $\{A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,|\,a_{1,1}+a_{2,2}=0\}$.

Exercice 9 [Famille de fonctions trigonométriques]

Montrer que la famille $(\cos,\sin,x\mapsto x\cos(x),x\mapsto x\sin(x))$ est libre, mais que, peu importe la valeur de $a,b,c\in\mathbb{R}$ la famille $(x\mapsto\cos(x+a),x\mapsto\cos(x+b),x\mapsto\cos(x+c))$ est liée.

La famille $(\sin,\cos,x\mapsto\sin(2x))$ est-elle libre ?

Exercice 10 [Altération d'une famille libre 1]

Soit (x,y,z) une famille libre de E. Montrer que la famille $(y+z,z+x,x+y)$ est libre.

Exercice 11 [Altération d'une famille libre 2]

Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille libre de E. On pose $y=\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i$ (pour (α_i) famille de scalaires). Donner une condition nécessaire et suffisante sur les α_i pour que la famille (x_i+y) soit libre.

Exercice 12 [Familles libres sur les fonctions]

On considère $\mu_1,\dots,\mu_n$ des réels deux-à-deux distincts. On leur associe les fonctions : $f_i : x\mapsto e^{\mu_i x}$ et $g_i : x\mapsto |x-\mu_i|$. Montrer que les familles (f_i) et (g_i) sont des familles libres de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 13 [Base sur les suites périodiques]

On fixe $p\in\mathbb{N}^*$:

1. Donner une base de l'ensemble des suites réelles p-périodiques.
2. Montrer que l'on peut trouver une base de l'ensemble des suites complexes p-périodiques constituée de suites géométriques.

Exercice 14 [Somme et intersection d'espaces vectoriels]

Soient F,G deux sev de E. Montrer que : $F\cap G=F+G\Leftrightarrow F=G$.

Exercice 15 [Espaces de fonctions supplémentaires]

On considère les espaces :

$$F_1=\{f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})\,|\,f(0)=f(1)\},\ F_2=\{f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})\,|\,\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=0\},\ G=\mathrm{vect}(x\mapsto x).$$

Montrer que $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})=F_1\oplus G=F_2\oplus G$.

Exercice 16 [Espaces de polynômes supplémentaires]

On considère $E=\mathbb{R}_3[X]$, $F=\mathbb{R}_1[X]$ et $G=\{P\in E\,|\,P(1)=P'(1)=0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E, et donner la décomposition correspondante pour $1,X,X^2,X^3$.