Feuille d'exercices n^{o}14 : Calculs matriciels

Exercice 1 [Matrices qui commutent]

1. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1; n]\!]$:

   - la matrice $ME_{i,j}$ est une matrice dont la j-ème colonne est la i-ème colonne de M ;
   - la matrice $E_{i,j}M$ est une matrice dont la i-ème ligne est la j-ème ligne de M

   Pour que M et $E_{i,j}$ commutent, ces matrices doivent être égales. Comme il y a toujours un 0 (dans $E_{i,j}M$ ou $ME_{i,j}$) à part en le coefficient d'indice (i, j) on a :

   $$\forall k, l \in [\![1 : n]\!],\ k \neq i \Rightarrow m_{k,i} = 0 \text{ et } k \neq j \Rightarrow m_{j,l}$$

   et l'égalité du coefficient d'indice (i, j) donne : $m_{i,j} = m_{j,j}$.

   Donc M a :

   - sa i-ème colonne nulle (sauf éventuellement le i-ème coefficient) ;
   - sa j-ème ligne nulle (sauf éventuellement le j-ème coefficient) ;
   - ces deux coefficients égaux.

   Et il est clair qu'une telle matrice convient.

2. Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice AD (resp. DA) est la matrice obtenue à partir de A en multipliant la i-ème ligne (resp. colonne) de A par λ_i.

   Et directement :

   $$\begin{aligned} AD = DA &\Leftrightarrow \forall i, j,\ AD[i, j] = DA[i, j] \\ &\Leftrightarrow \forall i, j,\ \lambda_i a_{i,j} = \lambda_j a_{i,j} \\ &\Leftrightarrow \forall i, j,\ \lambda_i = \lambda_j \text{ ou } a_{i,j} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i, j,\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

3. - avec la question 1 : si une matrice commute avec toute autre matrice, elle commute avec toutes les matrices élémentaires. Et donc tout coefficient d'indice (i, j) pour $i \neq j$ est nulle (la matrice est diagonale) et tous les coefficients diagonaux sont égaux. Donc il ne reste que les matrices scalaires.
   - avec la question 2 : si elle commute avec toutes les matrices diagonales qui ont tous les coefficients distincts, alors elle est diagonale. Mais, si deux coefficients diagonaux sont distincts (disons ceux d'indices i et j pour $i \neq j$), elle ne commute pas avec $E_{i,j}$. Donc tous ses coefficients diagonaux sont égaux : elle est scalaire.

Exercice 2 [Matrices et complexes]

1. Calcul direct : $J = -I_2$

2. On pose $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ (forme algébrique) :

   $$M(z) + M(z') = (aI_2 + bJ) + (a'I_2 + b'J) = (a + a')I_2 + (b + b')J = M(z + z')$$

   $$M(z)M(z') = (aI_2+bJ)(a'I_2+b'J) = aa'I_2+ba'J+ab'J+bb'J^2 = (aa'-bb')I_2+(ba'+ab')J = M(zz').$$

3. On montre par récurrence que $M(e^{i\theta})^n = M(e^{in\theta})$. Et deux possibilités :

- on pose $z = \rho e^{i\theta}$ pour $\theta, \rho \in \mathbb{R}$ (forme algébrique, mais pas obligatoire) et on a :

$$M(z)^n = \big(M(\rho e^{i\theta})\big)^n = \big(M(\rho)M(e^{i\theta})\big)^n = \big(\rho M(e^{i\theta})\big)^n = \rho^n M(e^{in\theta})$$

  et donc :

$$M(z)^n = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \rho^n \cos(n\theta) & -\rho^n \sin(n\theta) \\ \rho^n \sin(n\theta) & \rho^n \cos(n\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \rho^n \cos(n\theta) & = & 1 \\ \rho^n \sin(n\theta) & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_n.$$

- on montre de manière analogue que $M(z)^n = M(z^n)$. Et on prouve l'injectivité de $M : z \mapsto M(z)$ (il suffit de regarder les coefficients de la colonne de gauche). Et on a alors :

$$M(z)^n = I_2 \Leftrightarrow M(z^n) = I_2 = M(1) \Leftrightarrow z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}_n.$$

Exercice 3 [Matrices stochastiques]

1. Pour i fixé, la somme $\sum_{j=1}^n a_{i,j}$ est la somme des coefficients sur une ligne : cela veut dire qu'une matrice stochastique a ses coefficients dont la somme sur chaque ligne vaut 1.

   Comme tous ses coefficients sont positifs (par la première propriété), chaque coefficient est compris entre 0 et 1.

2. Par définition, le vecteur AX est une matrice colonne obtenue en sommant toutes les colonnes de A. C'est-à-dire :

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j} \\ \sum_{j=1}^n a_{2,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{n,j} \end{pmatrix}$$

   et donc $AX = X$ équivaut à la seconde propriété. La positivité des coefficients de A étant la première, on a l'équivalence.

3. On pourrait tout faire un peu brutalement en exprimant les coefficients de AB et $\frac{1}{2}(A+B)$: pour la somme les calculs ne sont pas trop horribles, mais pour le produit c'est moins pratique. On préfère utiliser la question 2. Si A, B sont stochastiques, alors tous leurs coefficients sont positifs ou nuls, et $AX = BX = X$.

   - les coefficients de $\frac{1}{2}(A+B)$ (moyenne des coefficients de A et B) sont bien positifs ou nuls et :

$$\frac{1}{2}(A+B)X = \frac{1}{2}(AX+BX) = \frac{1}{2}(X+X) = X$$

     donc $\frac{1}{2}(A+B)$ est bien stochastique ;

   - les coefficients de AB sont positifs ou nuls (en tant que sommes et produits de nombres positifs ou nuls, par formule du produit matriciel) et :

$$(AB)X = A(BX) = AX = X$$

     donc AB est bien stochastique.

Exercice 4 [Construction d'une matrice symétrique]

1. La matrice B est définie comme le produit d'une matrice de taille (p, n) par une matrice de taille (n, p) : c'est une matrice carrée de taille p. De plus :

$$B^T = (A^TA)^T = (A)^T \left(A^T\right)^T = A^TA = B$$

donc $B \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$.

Et pour $i \in [\![1; p]\!]$ on a :

$$b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} [A^T]_{i,k}[A]_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 \geqslant 0$$

2. On déduit que $\sum_{i=1}^{p} b_{i,i} \geqslant 0$ (somme de termes positifs ou nuls) avec égalité si, et seulement si, ils sont tous nuls. Mais par écriture de $b_{i,i}$, on a également :

$$b_{i,i} = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1; p]\!],\ a_{k,i} = 0$$

et finalement la somme des $b_{i,i}$ est nulle si, et seulement si, tous les $a_{k,i}$ sont nuls, c'est-à-dire que A est nulle (tous ses coefficients sont nuls).

Pour $p = 1$, on obtient A matrice colonne est nulle si, et seulement si, $A^TA = 0$: la matrice B a un seul coefficient, qui est donc égal à la somme de son coefficient diagonal.

Exercice 5 [Produit de matrices symétriques]

Pour de tels A, B :

$$AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow (AB)^T = AB \Leftrightarrow B^TA^T = AB \Leftrightarrow BA = AB$$

et la condition nécessaire et suffisante est que A et B commutent.

Exercice 6 [Inversibilité et matrices antisymétriques]

1. Posons $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors :

$(BX)^T(BX) = X^T(B^TB)X = X^T(I_n - A)(I_n + A)X = X^TX + X^TAX - X^TAX - X^TA^2X = X^TX + (AX)^T(A$

et on utilise le résultat de l'exercice 4 : les quantités $(BX)^T(BX)$, X^TX et $(AX)^T(AX)$ sont positives ou nulles, avec nullité si, et seulement si, respectivement $BX = 0$, $X = 0$, $AX = 0$. Et donc :

$$BX = 0 \Leftrightarrow (BX)^T(BX) = 0 \Leftrightarrow X^TX = (AX)^T(AX) = 0 \Leftrightarrow X = AX = 0$$

ce qui donne bien l'équivalence, et l'inversibilité de B.

2. Les matrices A et $-A$ étant antisymétriques, les matrices $(I_n - A)$ et $(I_n + A)$ sont inversibles. Et on a :

$$C^T = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)$$

(la transposée échange les produits, et l'inverse d'une transposée est la transposée de l'inverse).

Mais on a :

$$(I_n - A)(I_n + A) = I_n - A^2 = (I_n + A)(I_n - A)$$

et donc :

$$C^TC = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n - A)^{-1}(I_n - A)(I_n + A)(I_n + A)^{-1} = I_n$$

donc $C^TC = I_n$, et donc $C^{-1} = C^T$. On pose $C = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$. Montrer que $C^T = C^{-1}$.

Exercice 7 [Calculs d'inverses]

On calcule tous les inverses par pivot (soit comme un système, soit directement en échelonnant par les lignes ou les colonnes, et bien évidemment pas les deux en même temps) :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$: $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 8 [Diagonalisation, puissance, et suites]

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On calcule $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ce qui donne :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

qui est diagonale. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$D^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

mais aussi :

$$D^k = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\dots(P^{-1}AP) = P^{-1}A^kP$$

(avec les PP^{-1} qui s'éliminent, un peu comme un télescopage, ou si on préfère on peut très bien le rédiger à l'aide d'une récurrence). Et finalement :

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} & -2^k & -2^k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2^{k+1}-1 & -2^k & 1-2^k \end{pmatrix}.$$

(formule bien évidemment fausse pour $k = 0$, mais la formule pour D^k était fausse pour $k = 0$)

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ de sorte que :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n.$$

Par récurrence on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$$

et finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} x_n &= 2^{k+1} \\ y_n &= 1 \\ z_n &= 2^{k+1} - 1 \end{cases}$$

(formule à nouveau fausse pour $n = 0$).

Exercice 9 [Puissances de petites matrices]

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: binôme en écrivant $A = I_2 + B$ où $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $B^2 = B$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $B^n = B$. Par binôme, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = (I_2 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B = I_2 + (2^n - 1)B = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

La matrice A est inversible (triangulaire supérieure avec 1 et 2, non nuls, sur la diagonale). Donc A^n a un sens pour $n \in \mathbb{Z}$. Vérifions si la formule fonctionne pour $n < 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2^{-n} - 1 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} = I_2$$

et donc $\begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 2^{-n} - 1 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix}$. Mais $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Donc $A^{-n} = (A^{-1})^n = (A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{-n} - 1 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix}$. Et finalement la formule reste valable pour $n < 0$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

2. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$: binôme en écrivant $A = aI_2 + bB$ où $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est nilpotente ($B^2 = 0$) et par binôme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n = (aI_2 + bB)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k B^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k B^k = a^n I_2 + a^{n-1} bB = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

Formule valable pour $n = 0$. Et même valable pour $n \in \mathbb{Z}$ si la matrice est inversible (correspond au cas $a \neq 0$) avec la même preuve que le 1.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$: pas de binôme efficace ici. On calcule les premières puissances :

$$A^2 = 2I_n,\ A^3 = 2A,\ A^4 = 4I_n, \dots$$

et par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} A & \text{si} \quad n \text{ est impair} \\ 2^{\frac{n}{2}} I_2 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \end{cases}.$$

Formule valable pour $n \in \mathbb{Z}$ en notant que $A^{-1} = \dfrac{1}{2} A$.

4. $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$: $A = \cos(\theta) I_2 + \sin(\theta) J$ dont on peut calculer les puissances par binôme (en utilisant que $J^2 = -I_2$, ce qui fait des calculs en raisonnant modulo 4 sur les puissances, et un "i^k" permet de calculer plus rapidement) ; ou par récurrence, en reconnaissant la situation de l'exercice 2, et on trouve :

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

avec formule valable pour $n \in \mathbb{Z}$ (même méthode qu'avant pour le montrer).

Exercice 10 [Puissances de grandes matrices]

On regarde à chaque fois les premières puissances et on cherche si un schéma semble se répéter. On note k la taille des matrices.

1. $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$: $A^2 = kA$ (k la dimension) et par récurrence :

$$A^n = \begin{cases} I_k & \text{si} \quad n = 0 \\ k^{n-1} A & \text{si} \quad n \geqslant 1 \end{cases}.$$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$: on calcule les premières puissance :

$$A^2 = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ puis } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & \dots & k-1 \\ k-1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k-1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (k-1)A.$$

On a récursivement les puissances :

$$A^n = \begin{cases} I_k & \text{si} \quad n = 0 \\ (k-1)^{\frac{n-1}{2}} A & \text{si} \quad n \geqslant 1 \text{ impair} \\ (k-1)^{\frac{n-2}{2}} A^2 & \text{si} \quad n \geqslant 2 \text{ pair} \end{cases}.$$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$: on procède par binôme en écrivant $A = I_k + N$ où N est nilpotente (triangulaire stricte). Et les puissances de N contiennent une diagonale de 1 qui se décale de plus en plus haut. Ce qui donne :

$$A^n = (I_k + N)^n = \sum_{i=0}^{\min(n,k-1)} \binom{n}{i} N^i = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & \dots & \dots & \dots & \frac{n\dots(n-k+1)}{k!} \\ 0 & 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & n \end{pmatrix}$$

et on retrouve (pas étonnant) une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. La formule reste valable pour $n \in \mathbb{Z}$ en écrivant les coefficients binomiaux en extension (comme des polynômes) mais ce n'est pas demandé. La preuve se fait comme à l'exercice précédent.

Exercice 11 [Puissances et inverse]

1. On a la matrice N du 3 de l'exercice précédent. Les puissances de T décalent la diagonale de 1 et on trouve : $A = \sum_{k=0}^{n-1} T^k$ (avec n la taille des matrices).

2. Notons déjà que A est inversible (triangulaire avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1, donc non nuls). On fait apparaître une sorte de télescopage, un peu comme pour la somme des termes d'une suite géométrique, on alors la factorisation de $(A^n - B^n)$ faite en cours. On trouve :

$$(I_n - T)A = (I_n - T)\sum_{k=0}^{n-1} T^k = I_n^n - T^n = I_n$$

   donc $A^{-1} = I_n - T$.

   Et on a quasiment la même situation que l'exercice précédent pour calculer les puissances de A.

Exercice 12 [Diagonalisation et puissances]

On trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ qui est diagonale. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (valable comme D inversible) :

$$A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2-3^k & 3^k-1 \\ 2-2\cdot 3^k & 2\cdot 3^k - 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 [Racine carrée matricielle 1]

1. Si $M^2 = A$, alors $MA = M^3 = AM$ donc A et M commutent.

2. On note $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et on a alors :

$$MA = \begin{pmatrix} a & 4b & a+2b+9c \\ d & 4e & d+2e+9f \\ g & 4h & g+2h+9i \end{pmatrix} = AM = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ 4d+2g & 4e+2h & 4f+2i \\ 9g & 9h & 9i \end{pmatrix}.$$

   ce qui impose $g = d = h = b = 0$

   Donc $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ puis $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & (a+i)c \\ 0 & e^2 & (e+i)f \\ 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix}$ qui donne $a = \pm 1$, $e = \pm 2$, $i = \pm 3$, $c = \dfrac{1}{a+i}$ et $f = \dfrac{2}{e+i}$ (avec $a+i$ et $e+i$ toujours non nuls). Donc 8 possibilités en tout, entièrement déterminées par les valeurs de a, e, i.

Exercice 14 [Racine carrée matricielle 2]

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on souhaite trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

1. On fait un binôme en écrivant $A = I_3 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dont les puissances sont données par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B^n = \begin{cases} I_3 & \text{si} \quad n = 0 \\ 3^{n-1}B & \text{si} \quad n \geqslant 1 \end{cases}$$

et finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = I_n + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} \right) B = I_n + \frac{4^n - 1}{3} B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}.$$

2. Avec $n = 1/2$, on trouve :

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

qui vérifie bien $M^2 = A$ (calcul immédiat). On a même mieux : la formule convient aussi pour $n \in \mathbb{Z}$: elle donne l'inverse de A, ainsi que ses puissances.

3. On décompose $A = I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente avec $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $k \geqslant 3$: $N^k = 0$.

Par binôme pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = (I_3 + N)^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2n & (2n+1)n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui donne avec $n = 1/2$: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui vérifie bien $M^2 = A$.

Et comme pour le premier cas la formule A^n précédente est même valable pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 15 [Matrice circulante]

Chaque puissance de A décale la diagonale de 1 vers le haut. On trouve donc $A^n = I_n$, donc A est inversible avec :

$$A^{-1} = A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 16 [Somme de matrices nilpotentes]

On considère A, B nilpotentes d'indice respectivement n, m. Alors, si A et B commutent, $A+B$ est nilpotente d'indice au plus $n+m-1$ car par formule du binôme :

$$(A+B)^{n+m-1} = \sum_{k=0}^{n+m-1} \binom{n}{k} A^k B^{n+m-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} A^k B^{n+m-1-k} + \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n}{k} A^k B^{n+m-1-k} = 0+0=0$$

où tous les termes de la première somme sont nuls car :

$$k \leqslant n-1 \Rightarrow n+m-1-k \geqslant m \Rightarrow B^{n+m-1-k} = 0$$

et tous ceux de la seconde sont nuls car :

$$k \geqslant n \Rightarrow A^k = 0.$$

et on ne peut pas diminuer l'exposant en général (par exemple en prenant $A=0$ on a une égalité), mais c'est parfois moins que $n+m-1$ (prendre par exemple $A=B$, qui donne n comme indice de nilpotence).

Pour le cas de non commutativité, si on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A^T$, qui sont toutes les deux nilpotentes (matrices triangulaires strictes), leur somme n'est pas nilpotente (elle est inversible).

Exercice 17 [Inversibilité et polynôme annulateur]

Comme $a_0 \cdot a_p \neq 0$, on déduit que $a_0 \neq 0$ et $a_p \neq 0$. Et on a :

$$a_p A^p + \ldots a_2 A^2 + a_1 A = -a_0 I_n$$

donc :

$$A \left(-\frac{a_p}{a_0} A^{p-1} - \cdots - \frac{a_2}{a_p} A - \frac{a_1}{a_p} I_n \right) = I_n$$

donc A est inversible d'inverse $-\frac{a_p}{a_0} A^{p-1} - \cdots - \frac{a_2}{a_p} A - \frac{a_1}{a_p} I_n$.

Exercice 18 [Nilpotence de matrice triangulaires]

C'est la même preuve que dans le cours pour montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure. On coupe la somme qui définit le coefficient d'indice (i, j) du produit pour montrer qu'il est nul en montrant que tous ses termes sont nuls.

Avec $k = n$, on obtient :

$$\forall i, j \in [\![1; n]\!],\ i + n > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

mais la condition $i+n > j$ étant alors toujours vérifiée, on trouve que $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) = \{0\}$ (le singleton dont le seul élément est la matrice nulle). Une matrice triangulaire de diagonale nulle est un élément de $\mathcal{T}_1^+(\mathbb{K})$ (ou sa transposée l'est si on a une matrice triangulaire inférieure). Le résultat précédent et une récurrence immédiate montre que la puissance k-ème d'un tel élément est dans $\mathcal{T}_k^+(\mathbb{K})$. Donc la puissance n-ème est dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, donc est nulle : une telle matrice est donc nilpotente !

Exercice 19 [Matrices nilpotentes et matrices inversibles]

1. Formule du cours (on fait apparaître un télescopage).

2. Si N est nilpotente, en notant $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$, on a :

$$I_n = I_n^p - N^p = (I_n - N) \left(\sum_{k=0}^{p-1} N^k \right)$$

ce qui assure que $(I_n - N)$ est inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{p-1} N^k$. Le cas de $I_n + N$ se traite en changeant N en $-N$ (également nilpotente), qui donne l'inversibilité de $(I_n + N)$ avec comme inverse $\sum_{k=0}^{p-1} (-N)^k$.

3. Supposons A inversible commutant avec N nilpotente. Notons $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$. Alors :

$$A + N = A(I_n + A^{-1}N)$$

avec $A^{-1}N$ nilpotente, comme par commutativité :

$$(A^{-1}N)^p = A^{-p}N^p = 0$$

et par le résultat précédent on déduit que $I_n + A^{-1}N$ est inversible d'inverse : $\sum_{k=0}^{p-1} A^{-k}N^k$.

Par inversibilité de A, on déduit que $A + N$ est inversible d'inverse :

$$\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^{-k}N^k\right) A^{-1}$$

Pour la réciproque : si $A+N$ est inversible, alors $A+N$ commute avec $-N$ (comme A et N commutent avec N, le calcul est immédiat) et on peut appliquer le point précédent pour déduire que $A = A+N-N$ est inversible. Ce qui donne bien la réciproque.

Exercice 20 [Matrice à diagonale dominante]

Par l'absurde, supposons A non inversible. Alors l'équation $AX = 0$ possède une solution non nulle. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une telle solution. Notons $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max|x_i|$. Alors la i_0-ème ligne de AX (qui vaut 0) donne :

$$0 = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j$$

donc :

$$x_{i_0}a_{i_0,i_0} = \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j}x_j$$

puis en divisant par $x_{i_0} \neq 0$:

$$a_{i_0,i_0} = \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j}\frac{x_j}{x_{i_0}}$$

et par inégalité triangulaire :

$$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}| \underbrace{\left|\frac{x_j}{x_{i_0}}\right|}_{\leqslant 1} \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$$

d'où la contradiction.

Donc A est inversible.

Exercice 21 [Non-inversibilité d'une matrice antisymétrique]

On y a de manière brutale : une telle matrice est de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$. Si deux des scalaires a, b, c sont nuls : on a une ligne ou une colonne nulle, donc une matrice non inversible.

Sinon : $A\begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix} \neq 0$ donc A n'est pas inversible.