Feuille d'exercices n^{o}14 : Calculs matriciels

Exercice 1 [Matrices qui commutent]

1. Soient $i, j \in [\![1;n]\!]$: déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec $E_{i,j}$.
2. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont deux-à-deux distincts. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec D si, et seulement si, A est diagonale.
3. Déduire de l'une des questions précédentes que les matrices scalaires sont les seules à commuter avec toute autre matrice.

Exercice 2 [Matrices et complexes]

On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2.
2. Pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (forme algébrique), on pose $M(z) = aI_2 + bJ \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que :
$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ M(z+z') = M(z) + M(z') \text{ et } M(zz') = M(z)M(z').$$
3. Calculer $M(e^{i\theta})^n$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. En déduire que : $z \in \mathbb{U}_n \Leftrightarrow M(z)^n = I_2$.

Exercice 3 [Matrices stochastiques]

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **stochastique** si elle vérifie que :

- $\forall i, j \in [\![1;n]\!],\ a_{i,j} \geqslant 0$;
- $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

1. Expliquer ce que signifie la seconde propriété en terme de somme de coefficients. Et montrer que, si A est stochastique, alors tous ses coefficients ont des valeurs dans $[0;1]$.
2. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si, et seulement si, les coefficients de A sont positifs ou nuls et que $AX = X$.
3. Montrer que, si A et B sont stochastiques, alors $\frac{1}{2}(A+B)$ et AB le sont aussi.

Exercice 4 [Construction d'une matrice symétrique]

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note $B = (b_{i,j}) = A^T A$.

1. Montrer que $B \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ et que ses coefficients diagonaux sont positifs.
2. Montrer que $\sum_{i=1}^p b_{i,i} \geqslant 0$ avec égalité si, et seulement si, $A = 0$. Que devient ce résultat si $p = 1$?

Exercice 5 [Produit de matrices symétriques]

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que $AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 6 [Inversibilité et matrices antisymétriques]

Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $B = I_n + A$ est inversible (on pourra calculer $(BX)^T(BX)$ de deux manières pour montrer que $BX = 0 \Leftrightarrow X = 0$).
2. On pose $C = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$. Montrer que $C^T = C^{-1}$.

Exercice 7 [Calculs d'inverses]

Calculer les inverses des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 3. $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 8 [Diagonalisation, puissance, et suites]

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire les puissances de A.
2. En déduire le terme général des suites $(x_n), (y_n), (z_n)$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 0 \\ z_0 &= 0 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= 4x_n - 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} &= x_n - z_n \\ z_{n+1} &= 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}.$$

Exercice 9 [Puissances de petites matrices]

Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n pour chacune des matrices A suivantes. Si cela a un sens, le faire pour $n \in \mathbb{Z}$.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Exercice 10 [Puissances de grandes matrices]

Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n pour chacune des matrices A suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 11 [Puissances et inverse]

On considère les matrices :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les différentes puissances de T, et en déduire une expression de A comme somme de puissances positives ou nulles de T.

2. En déduire une expression simple de A^{-1}, ainsi que des puissances de A.

Exercice 12 [Diagonalisation et puissances]

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $P^{-1}AP$, et en déduire une expression simple des puissances de A.

Exercice 13 [Racine carrée matricielle 1]

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

et on souhaite trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

1. Montrer que, si M est solution du problème, alors M commute avec A.

2. En déduire la nullité de certains coefficients de M, puis en déduire les valeurs possibles pour M.

Exercice 14 [Racine carrée matricielle 2]

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on souhaite trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

1. Déterminer les puissances de A (par la méthode que l'on voudra).

2. Avec l'abus de notation $M = A^{1/2}$, en déduire un "candidat" possible pour M. Et vérifier qu'un tel M répond bien au problème.

3. Appliquer la même méthode avec la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 [Matrice circulante]

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les puissances successives de A. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 16 [Somme de matrices nilpotentes]

Montrer que la somme de deux matrices nilpotentes qui commutent est nilpotente. Montrer que le résultat est faux en général si les matrices ne commutent pas.

Exercice 17 [Inversibilité et polynôme annulateur]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{K}$ avec $a_0 \cdot a_p \neq 0$ tels que : $a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_p A^p = 0$.

Montrer que A est inversible, et exprimer son inverse en fonction des puissances de A.

Exercice 18 [Nilpotence de matrice triangulaires]

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{T}_k^+(\mathbb{K})$ le sous ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :

$$\forall i, j \in [\![1; n]\!],\ i + k > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

Montrer que, pour tout $k, l \in \mathbb{N}$: $A \in \mathcal{T}_k^+(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{T}_l^+(\mathbb{K}) \Rightarrow AB \in \mathcal{T}_{k+l}^+(\mathbb{K})$. Et en déduire qu'une matrice triangulaire de diagonale nulle est nilpotente d'indice au plus n.

Exercice 19 [Matrices nilpotentes et matrices inversibles]

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que : $A^p - B^p = (A - B) \cdot \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\right)$.
2. En déduire que, si N est un matrice nilpotente, alors $I_n + N$ est inversible et donner son inverse.
3. Plus généralement, si N est nilpotente et commute avec A, montrer que A est inversible si, et seulement si, $A + N$ est inversible.

Exercice 20 [Matrice à diagonale dominante]

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall i \in [\![1; n]\!],\ \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|.$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 21 [Non-inversibilité d'une matrice antisymétrique]

Soit $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{K})$. Montrer que A n'est pas inversible.