Feuille d'exercices n^{o}13 : Suites numériques

Exercice 1 [Inégalité et limites] La suite $(u_n - v_n)$ tend vers $l_1 - l_2$ et on se ramène au résultat du cours.

Si $l_1 = l_2$ on ne peut rien conclure (on pourrait de toute façon échanger les rôles de u et v donc ce serait louche de conclure quelque chose).

Exercice 2 [Critère de convergence de suites]

1. $u_n v_n \leqslant u_n, v_n \leqslant 1$ et on conclut par encadrement que $\lim u_n = \lim v_n = 1$;
2. $a \geqslant u_n = (u_n + v_n) - v_n \geqslant (u_n + v_n) - b$ et on conclut par encadrement que $\lim u_n = a$ puis que $\lim v_n = b$.
3. par combinaisons linéaires : $u_n = \dfrac{(u_n+v_n)+(u_n-v_n)}{2}$ donc $\lim u_n = \dfrac{a+b}{2}$ et $v_n = \dfrac{(u_n+v_n)-(u_n-v_n)}{2}$ donc $\lim v_n = \dfrac{a-b}{2}$
4. On fait apparaître des formes canoniques : $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 = (u_n + v_n/2)^2 + 3/4v_n^2 \geqslant 3/4v_n^2 \geqslant 0$ donc $\lim v_n = 0$ par encadrement et pareil pour u_n.

Exercice 3 [Limites version ε]

1. pour $A \in \mathbb{R}$, $n_0 = \lfloor e^A \rfloor + 1$ convient ;
2. pour $\varepsilon > 0$, $n_0 = \lfloor -\ln(\varepsilon) \rfloor + 1$ convient ;
3. pour $\varepsilon > 0$, $n_0 = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$ convient ;
4. pour $A \in \mathbb{R}$, $n_0 = \lfloor A^2 \rfloor + 1$ convient.

Exercice 4 [Quelques calculs de limites]

1. $\frac{1-\sin^2(2n)}{\sqrt{n}} \to 0$ par encadrement ;
2. $\sqrt{n}\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor \to 0$ (stationnaire à partir de $n = 2$) ;
3. $\frac{\sqrt{n+4}}{n-\sqrt{n}} \to 0$ (par équivalent ;
4. $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} \to 1$ par dl (on se ramène en 1 dans les racines) ou quantité conjuguée, ou encadrement d'intégrales ;
5. $\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$équivalents suivant que $a < b$, $a > b$ ou $a = b$ qui donne -1, 1 ou 0 comme limite ;
6. $\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/n} \to 1$: on passe en forme exponentielle et $\dfrac{1}{n}\ln(\sin(1/n)) = \dfrac{1/n}{\sin(1/n)} \cdot \sin(1/n)\ln(\sin(1/n))$ qui tend vers 0 par produit, limite classique et croissances comparées, et composition.

Exercice 5 [Encadrements et limites de sommes]

1. $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \geqslant \sum 1 \geqslant n \to +\infty$ par divergence par minoration ;

2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$ par divergence par minoration ;

3. $0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} \leqslant \sum \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$ par encadrement ;

4. $0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{n}{(n+1)^2} \to 0$ par encadrement ;

5. $\frac{n^2}{n^2+n} = \sum \frac{n}{n^2+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leqslant \sum \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}$ qui tend vers 1 par encadrement ;

6. $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \sum \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ qui tend vers 1 par encadrement.

Exercice 6 [Critère de d'Alembert]

1. On aurait sinon $l < 0$ et donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 0$ à partir d'un certain rang, ce qui est impossible.

2. à partir d'un rang n_0 : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < q$ avec $q = \dfrac{l+1}{2} \in]l, 1[$.

   Par itération : $u_n \leqslant q^{n-n_0} u_{n_0}$ et donc $u_n \to 0$ par encadrement.

3. à partir d'un rang n_0 : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > q$ avec $q = \dfrac{l+1}{2} \in]1, l[$.

   Par itération : $u_n \geqslant q^{n-n_0} u_{n_0}$ et donc $u_n \to +\infty$ par divergence par minoration.

4. Prendre $u_n = 1$, $u_n = n$ et $u_n = 1/n$ pour voir que tout est possible

Exercice 7 [Critère de Cauchy]

On a pareil, avec les majorations/minorations $u_n \leqslant q^n$ ou $u_n \geqslant q^n$ pour $q = \dfrac{1+l}{2}$, et les mêmes conclusions.

Les trois exemple du cas $n = 1$ restent valable.

Exercice 8 [Vrai–Faux autour des suites]

1. F : $u_n = n$ et $v_n = -1$;

2. V : si N, M sont les périodes des deux suites, leur somme est $N \times M$ périodique ;

3. F : $u_n = (-2)^n$;

4. F : $u_n = 1/n$ ou $1/n^2$;

5. F : $u_n = (1 + 1/n)$ ou $(1 + 1/n^2)$;

6. V : $u_n^2 = \sqrt{u_n^4}$ et continuité de $x \mapsto \sqrt{x}$;

7. F : $u_n = (-1)^n/n$;

8. F : $u_n = n$;

9. F : $u_n = (-1)^n$.

Exercice 9 [Un calcul de limite]

1. valeurs dans $[0;1]$: par encadrement.

   Monotonie : $u_{n+1}-u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\left(\dfrac{n}{\sqrt{n+1}} - \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right) < 0$ (inégalité terme à terme)

   décroissante minorée : converge vers $l \in [0;1]$ (même $[0;1[$ car stricte décroissance).

2. $u_{2n} = \dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\dfrac{1}{\sqrt{k}} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

   Passage à la limite : $l \leqslant \dfrac{l}{2} + 0$ donc $l \leqslant 0$ donc $l = 0$.

Exercice 10 [Suite définie implicitement 1]

1. $f_n(x) = x^n - \cos(x)$: $f_n'(x) = nx^{n-1} + \sin(x) \geqslant 0$ sur $[0;1]$ avec égalité ssi $x = 0$.

   Donc f_n strictement croissante sur $[0;1]$ avec $f_n(0) = -1 < 0 < 1 - \cos(1) = f(1)$.

   Par corollaire TVI : un unique $x \in [0;1]$ tel que $f(x) = 0$.

2. (x_n) croissante car $x_n \in [0;1]$ donc $x_n^{n+1} < x_n^n$ puis $x_n^{n+1} - \cos(x_n) < x_n^n - \cos(x_n) = 0 = x_{n+1}^{n+1} - \cos(x_{n+1})$ et on conclut $x_n < x_{n+1}$ par stricte croissance de f_{n+1}.

   Par l'absurde, si $l \neq 1$: alors $l \in [0;1[$. Donc $x_n^n \to 0$ (encadrement) puis $0 = x_n^n - \cos(x_n) \to -\cos(l) < 0$. Contradiction.

   Donc $l = 1$.

Exercice 11 [Suite définie implicitement 2]

1. $f_n : x \mapsto x + x^2 + \cdots + x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $f(0) = 0$ et $f(1) = n \geqslant 1$ donc $f_n(x) = 1$ possède une unique solution dans $]0;1]$.

2. $f_n(1/2) = 1 - 1/2^n < 1$ donc $1/2 < x_n$

3. Monotonie : $f_{n+1}(x_n) = 1 + x_n^{n+1} > 1 = f_{n+1}(x_{n+1})$ donc (x_n) est décroissante

   Comme $x_2 < 1$ et $1/2$ est un minorant de (x_n) on a le résultat par limite monotone.

4. On montre $l = 1/2$:

   - méthode 1 : $f(1/2 + 1/2^n) \geqslant 1$ donc $1/2 \leqslant x_n \leqslant 1/2 + 1/2^n$ puis par encadrement ;
   - $1 = x_n + \cdots + x_n^n = x_n \cdot \dfrac{x_n^n - 1}{x_n - 1} \to \dfrac{l}{1-l}$ comme $x_n^n \to 0$ (avec $0 \leqslant x_n \leqslant x_2 < 1$ puis puissance).

     Donc $1 = \dfrac{l}{1-l}$ donc $l = 1/2$.

Exercice 12 [Limites de sinus ou de cosinus]

1. $u_{n+1} = \cos(\alpha)u_n - \sin(\alpha)v_n$ et $v_{n+1} = \sin(\alpha)u_n + \cos(\alpha)v_n$.

2. si (u_n) converge vers l : $v_n = \dfrac{\cos(\alpha)u_n - u_{n+1}}{\sin(\alpha)}$ tend vers $l\dfrac{\cos(\alpha) - 1}{\sin(\alpha)}$;

   si (v_n) converge vers l : $u_n = \dfrac{v_{n+1} - \cos(\alpha)v_n}{\sin(\alpha)}$ converge vers $l\dfrac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

3. Par l'absurde, si l'une des deux converge, les deux convergent. En notant l_1, l_2 les limites on trouve $l_1 = l_2 = 0$. Mais on devrait avoir $l_1^2 + l_2^2 = 0$. Contradiction.

4. si $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$, la suite (v_n) est constante (nulle) et (u_n) est soit constante de valeur 1, soit oscille entre 1 et -1.

Exercice 13 [Moyenne arithmético-géométrique]

1. $a + b - 2\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$

2. Par le 1. on a déjà pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leqslant v_n$. On déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$. En effet : $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geqslant \sqrt{u_n u_n} = u_n$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \leqslant \dfrac{v_n + v_n}{2} = v_n$.

   Et donc (u_n) et (v_n) sont croissantes et décroissantes à partir du rang 1. Et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée var v_1 tandis que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est minorée par u_1. Donc les suites convergent.

   Si l_1, l_2 sont leur limite : $l_2 = \dfrac{l_1 + l_2}{2}$ donc $l_1 = l_2$.

   Pour les majorations, on pouvait aussi voir par récurrence que (u_n) et (v_n) sont à valeurs dans $[0; \max(a, b)]$ (l'initialisation est immédiate, et l'hérédité se fait avec les croissances de $x \mapsto \dfrac{x + y}{2}$ et $x \mapsto \sqrt{xy}$ sur $\mathbb{R}_+$, à $y \in \mathbb{R}_+$ fixé.

   Autre méthode : pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

   donc en itérant : $0 \leqslant v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2^n}(v_1 - u_1)$ donc $u_n - v_n)$ tend vers 0, et les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite.

3. Pour $u_0 = v_0 = a$, les suites (u_n) et (v_n) sont constantes de valeur a donc $M(a, a) = a$.

   Pour $v_0 = 0$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 0$. Donc $M(a, 0) = 0$ (et on aurait de même $M(0, a) = 0$). On peut sinon montrer que (v_n) est géométrique de raison $1/2$ donc converge vers 0.

   On montre que les suites associées à $\lambda a, \lambda b$ sont les multiplications par λ des suites associées à a, b. Donc $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$.

Exercice 14 [Séries alternées]

1. Par décroissance de (u_n), on trouve :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0 \text{ et } S_{2n+3} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geqslant 0$$

   ce qui donne les monotonies.

   Et comme (u_n) tend vers 0 :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \to 0$$

   Donc les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

2. Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent donc vers la même limite l, qui est la limite de (S_n), qui converge bien. Et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$S_{2n+1} \leqslant l \leqslant S_{2n}$$
donc $|S_{2n} - l| = S_{2n} - l \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}$ et de plus :
$$S_{2n+1} \leqslant l \leqslant S_{2n+2}$$
donc $|S_{2n+1} - l| = l - S_{2n+1} \leqslant S_{2n+2} - S_{2n+1} = u_{2n+2}$ ce qui prouve l'inégalité demandée par disjonction de cas, suivant la parité de n.

Exercice 15 [Limite d'une somme] Monotonie : pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2\sqrt{n(n+1)} - 2(n+1/2)}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+n+1/4}\right) < 0$$

donc (u_n) est strictement décroissante, et :

$$v_{n+1} - v_n = \cdots = \frac{2}{\sqrt{n+1}}\left(\sqrt{n^2+3n+9/4} - \sqrt{n^2+3n+2}\right) > 0$$

donc (v_n) est strictement croissante.

Et $u_n - v_n = 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.

Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

On note l leur limite commune. On a : $u_n = l + \mathrm{o}(1)$ donc $\sum \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + l + \mathrm{o}(1) \sim 2\sqrt{n}$ et $\dfrac{1}{n^\alpha} \sum \frac{1}{\sqrt{k}} \sim \dfrac{2}{n^{\alpha-1/2}}$ tend vers 0 si $\alpha > 1/2$, 2 si $\alpha = 1/2$ et $+\infty$ si $\alpha < 1/2$.

Exercice 16 [Une suite complexe]

Par l'absurde si elle convergeait : notons l sa limite, qui vérifie $|l| = 1$ (par passage à la limite).

Mais on a : $e^{i\ln(2n)} = e^{i\ln(2)} e^{i\ln(n)}$ tend vers $e^{i\ln(2)} \cdot l$, mais aussi vers l (suite extraite). Donc $e^{i\ln(2)} = 1$ (mais c'est faux) ou $l = 0$ (mais c'est faux). D'où la contradiction.

Exercice 17 [Suites réelles et suites complexes]

La relation de récurrence devient : $w_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} w_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4} w_n$. Donc (w_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}$ qui vérifie donc $|q| < 1$. Donc (w_n) converge vers 0, donc (u_n) et (v_n) aussi.

Exercice 18 [Suite extraite et suites monotone]

(u_n) est monotone, donc elle a une limite l (finie ou non). La suite extraite (u_{2n}) a la même limite. Comme elle converge, alors l est finie donc (u_n) converge.

Exercice 19 [Limites de suites extraites]

Il suffit de prouver que les limites de (u_{2n}) et de (u_{2n+1}) sont les mêmes. Posons a, b, c les limites des trois suites extraites :

- la suite (u_{6n}) est extraite de (u_{2n}) donc tend vers a, et de (u_{3n}) donc tend vers b. Par unicité de la limite : $a = b$.

- la suite (u_{6n+3}) est extraite de (u_{2n+1}) donc tend vers c, et de (u_{3n}) donc tend vers b. Par unicité de la limite : $b = c$.

Donc $a = b = c$, donc $a = c$: (u_n) converge.

Exercice 20 [Suite extraites d'une suite de chiffres]

Les décimales de π sont des nombres compris entre 0 et 9. Il y en a une infinité, donc l'un des chiffres (on ne sait pas lequel a priori) se répète à l'infini. On extrait de la suite des chiffres seulement ce chiffre : on a une sous-suite constante, donc convergente.

Exercice 21 [Propriétés de suites extraites]

Soit (u_n) croissante (le cas décroissant se traite de même). Considérons φ extractrice et posons v_φ suite extraite de u. Montrons que v est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$: par (stricte) croissance de φ : $\varphi(n+1) > \varphi(n)$. Donc par croissance de u : $u_{\varphi(n+1)} \geqslant u_{\varphi(n)}$

Donc v est croissante. Et le même raisonnement montre que la décroissance est conservée, tout comme la stricte monotonie (la stricte croissance de φ est indispensable).

Autre méthode : on peut directement reconnaître une composée (et on sait comment se comporte la composition avec les monotonie).

Les suites extraites d'une suite périodique ne sont pas périodiques pour autant : si on prend $(u_n) = ((-1)^n)$ qui est 2-périodique, et $\varphi(n) = n!$ alors v_n prend comme valeurs $-1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ qui n'est pas périodique (problème sur les premiers termes). Et on peut imaginer aussi φ qui prendrait comme valeurs un nombre impair, puis pair, puis deux impairs, puis un pair, puis trois impairs, puis un pair, puis quatre impairs, etc. (possible par l'infinité de l'ensemble des nombres pairs et des nombres impairs), et la suite extraite ne serait alors clairement pas périodique.

Exercice 22 [Suite de suites extraites]

Avec $p = n$ on a : $0 \leqslant u_{2n} \leqslant \dfrac{2n}{n^2} = \dfrac{2}{n} \to 0$ donc la suite (u_{2n}) tend vers 0.

Avec $p = n + 1$ on a : $0 \leqslant u_{2n+1} \leqslant \dfrac{2n+1}{n(n+1)} \to 0$ donc la suite (u_{2n+1}) tend vers 0.

Donc (u_n) tend vers 0.

Exercice 23 [Suites arithmético-géométriques]

1. $u_{n+1} = 2u_n + 1$: $l = -1$ et $(v_n) = (u_n + 1)$ géométrique de raison 2 donc $v_n = 2^n v_0 = 2^n(a+1)$ puis $u_n = 2^n (a+1) - 1$ qui tend vers -1 si $a = -1$ (constante), vers $+\infty$ si $a > -1$ (strictement croissante) ou $-\infty$ si $a < -1$ (strictement décroissante).

2. $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$: $l = 1$ et $(v_n) = (u_n - 1)$ géométrique de raison $1/2$ donc $v_n = \dfrac{v_0}{2^n} = \dfrac{a-1}{2^n}$ puis $u_n = \dfrac{a-1}{2^n} + 1$ qui tend toujours vers 1 (opération sur les limites).

Exercice 24 [Doubles suites arithmético-géométriques]

1. On remplace directement : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - v_{n+1} = 3u_n + 2v_n - 2u_n - 3v_n = u_n - v_n.$$

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n - v_n = u_0 - v_0 = -1$ puis :

   $u_{n+1} = 3u_n + 2v_n = 3u_n - 2(u_n - v_n) + 2u_n = 5u_n + 2$ et $v_{n+1}v_{n+1} = 2u_n + 3v_n = 2(u_n - v_n) + 2v_n + 3v_n = 5v_n - 2$

3. Pour (u_n) : on a $l = -1/2$ puis $u_n = 5^n (u_0 + 1/2) - 1/2 = 5^n \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}$.

   Pour (v_n) : on a $l = 1/2$ puis $v_n = 5^n (v_0 - 1/2) + 1/2 = 5^n \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}$.

   Et on retrouve que $u_n - v_n = -1$: tout va bien !

Exercice 25 [Suites linéaires récurrentes d'ordre 2]

1. polynôme caractéristique : $X^2-4X+4=(X-2)^2$: donc $u_n=(an+b)2^n$ pour a,b constantes. On a $u_0=1=b$ et $u_1=0=2a+2b$ donc $u_n=(1-n)2^n$.

2. polynôme caractéristique : $X^2-3X+1=\left(X-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$: donc $u_n=a\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n+b\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ avec $a=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $b=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Et au passage on échange a et b en échangeant $\pm\sqrt{5}$, donc c'est rassurant.

3. polynôme caractéristique : $X^2-X+1=\left(X-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)=(X-e^{i\pi/3})(X-e^{-i\pi/3})$: donc u_n peut s'écrire $u_n=\lambda e^{in\pi/3}+\mu e^{in\pi/3}=a\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)+b\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$ avec $\lambda=\mu=1$ ou $a=2$ et $b=0$ (fait avec $u_0=2$ et $u_1=1$ pour que les calculs soient moins horribles).

4. polynôme caractéristique : $X^2-2\cos(\theta)X+1=(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$: et on a deux cas :
   - si $\theta\neq 0[\pi]$: alors on a deux racines complexes conjuguées donc u_n peut s'écrire $u_n=\lambda e^{in\theta}+\mu e^{in\theta}=a\cos(n\theta)+b\sin(n\theta)$ avec $\lambda=-\mu=\dfrac{1}{\sin(\theta)}$ et $a=0$ et $b=\dfrac{2}{\sin(\theta)}$ (cohérent avec le choix de θ comme dénominateur doit être non nul)
   - si $\theta=0[2\pi]$: alors 1 est racine double et $u_n=(an+b)=2n$
   - si $\theta=\pi[2\pi]$: alors (-1) est racine double et $u_n=(an+b)\cdot(-1)^n=-2n(-1)^n$.

   (fait avec $u_0=0$ et $u_1=2$ pour que les calculs soient moins horribles)

Exercice 26 [Limites de suites récurrentes]

1. $u_{n+1}=u_n^2$: on pose $f:x\mapsto x^2$ et $g=f-\mathrm{id}$; on se ramène à $\mathbb{R}_+$ qui est stable par f est sur lequel f est (strictement) croissante, légitime comme $u_n\in\mathbb{R}_+$ pour tout $n\geqslant 1$. Donc (u_n) est monotone à partir du rang 1, et sa monotonie est donnée par le signe de $g:x\mapsto x^2-x=x(x-1)$ qui est positive sur $]1;+\infty[$, négative sur $]0;1[$ et nulle en 1 et 0 (on ne s'intéresse qu'à $\mathbb{R}_+$). Et ainsi on a trois cas :
   - si $u_1=0$ ou 1 (c'est-à-dire $u_0=0$ ou ±1) : alors (u_n) est stationnaire (à partir du rang 1) et converge vers $u_1=0$ si 0 et 1 si $u_0=\pm1$;
   - si $u_1\in]0;1[$ (c'est-à-dire $u_0\in]-1;0[\cup]0;1[$) : alors (u_n) est décroissante à partir du rang 1. Elle est minorée par 0 donc converge. Elle converge vers un point fixe de f (par continuité de f), donc vers 0 ou 1. Mais étant décroissante elle ne peut pas converger vers 1. Donc elle converge vers 0.
   - si $u_1\in]1;+\infty[$ (c'est-à-dire si $u_0\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$) : alors (u_n) est croissante à partir du rang 1. Elle a une limite qui, si elle est finie, est un point fixe de f. Mais elle est croissante, et de premier terme strictement plus grand que 1, donc ne peut converger ni vers 1, ni vers 0 : ce sont les seuls points fixes, donc elle ne converge pas. En tant que suite croissante elle tend donc vers $+\infty$.

2. $u_{n+1}=u_n^2+1$: on pose $f:x\mapsto x^2$ et $g=f-\mathrm{id}$; on se ramène cette fois-ci à $[1;+\infty[$. Et f étant croissante sur cet intervalle, g y étant positive, alors (u_n) est croissante à partir du rang 1, donc a une limite (finie ou $+\infty$). Mais f n'a pas de point fixe (l'équation $X^2-X+1=0$ n'a pas de racine réelle), donc (u_n) ne peut pas converger, donc (u_n) tend vers $+\infty$.

3. $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$: on pose $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ qui est croissante sur $[-1;+\infty[$ (stable) et $g = f - \mathrm{id}$. L'unique point fixe de f est $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Et g est positive sur $[-1;\alpha[$, négative sur $]\alpha;+\infty[$, ne s'annulant qu'en α. On déduit :

   - si $u_0 \in [-1;\alpha[$: (u_n) est croissante ; facile de voir qu'elle est majorée par α (par récurrence avec la croissance de f, ou on peut aussi voir qu'elle changerait de monotonie sinon), donc converge vers un point fixe (par continuité de f), donc vers α ;
   - si $u_0 = \alpha$: (u_n) est constante de valeur α ;
   - si $u_0 > \alpha$: (u_n) est décroissante ; elle est minorée (clair par 0, mais on peut aussi montrer qu'elle est minorée par α par récurrence) ; donc elle converge (limite monotone) vers un point fixe (par continuité de f) donc vers α.

   Et donc peu importe la valeur de u_0, la suite (u_n) tend vers α.

4. $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$: on pose $f : x \mapsto 1 + \ln(x)$: problème ici car f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, qui n'est pas stable. Donc on veut la restreindre à $[1;+\infty$ (qui est bien stable lui), et sur lequel f est croissante. Par inégalité classique, $g = f - \mathrm{id}$ est négative, ne s'annulant qu'en 1 (qui est donc l'unique point fixe de f), donc (u_n) est toujours décroissante. On a trois cas :

   - si $u_0 > 1$: on montre par récurrence que $u_n > 1$ et on a donc une suite bien définie, décroissante, minorée (par 1), qui converge vers un point fixe (continuité de f), donc vers 1 ;
   - si $u_0 = 1$: la suite (u_n) est constante de valeur 1 (donc converge vers 1) ;
   - sinon : elle est décroissante, donc ne peut converger, donc n'est pas minorée, ce qui fait que la suite (u_n) n'est plus définie à partir d'un certain rang (elle doit être positive, donc minorée, pour être toujours définie) ;

5. $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$: autre inégalité de classique, mais pas de problème de définition cette fois-ci. On travaille sur $\mathbb{R}$ (stable par $f : x \mapsto e^x - 1$) et sur lequel $g = f - \mathrm{id}$ est positive (donc (u_n) est toujours croissante), ne s'annulant qu'en 0 (l'unique point fixe de f). Et ainsi :

   - si $u_0 < 0$: la suite (u_n) est croissante, majorée par 0 (par récurrence), donc converge vers un point fixe de f (continuité) donc vers 0 ;
   - si $u_0 = 0$: la suite est constante de valeur 0 ;
   - si $u_0 > 0$: la suite est croissante, donc a une limite ; si elle convergeait, sa limite serait 0 (seul point fixe), ce qui est interdit par la monotonie de (u_n) et le fait que $u_0 > 0$. Et ainsi (u_n) diverge : en tant que suite croissante, elle tend vers $+\infty$.

6. $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^2}{4}$: on pose $f : x \mapsto \frac{x^2}{4} + 1$, on travaille sur $\mathbb{R}_+$ stable, légitimé car $u_n \in \mathbb{R}_+$ pour tout $n \geqslant 1$, et sur lequel f croissante et $g = f - \mathrm{id}$ positive ne s'annulant qu'en 2. Donc (u_n) est croissante à partir du rang 1 et :

   - si $u_1 < 2$ (c'est-à-dire $u_0 \in]-2;2[$) : (u_n) est croissante (pas seulement à partir du rang 1), et majorée par 2 (par récurrence) donc tend vers un point fixe de f (par continuité) donc converge vers 2 ;
   - si $u_1 = 2$ (c'est-à-dire $u_0 = \pm 2$) : (u_n) est stationnaire de valeur 2 (à partir du rang 1) donc converge vers 2 ;
   - si $u_1 > 2$ (c'est-à-dire $u_0 \in]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$) alors (u_n) est croissante, donc a une limite ; cette limite, si elle était finie, serait un point fixe, mais c'est impossible car ce serait 2 (problème avec la croissance de (u_n) et que $u_1 > 2$) ; donc (u_n) tend vers $+\infty$.

7. $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$: on pose $f : x \mapsto x + 1/x$ et on travaille séparément sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$ (tous les deux stables) et sur lesquels $g = f - \mathrm{id}$ est de signe constant (positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et négative sur $\mathbb{R}_-^*$) ne s'annulant jamais (donc pas de point fixe pour f). Ainsi (u_n) ne peut pas converger et :

   - si $u_0 > 0$: la suite (u_n) est à valeurs positives (stabilité de $\mathbb{R}_+^*$ par f) et croissante (signe de g sur $\mathbb{R}_+^*$) donc a une limite, qui est nécessairement $+\infty$ (continuité de f mais pas de point fixe)
   - si $u_0 < 0$: de même (u_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$, décroissante, et tend vers $-\infty$.

Exercice 27 [Équation fonctionnelle et suite linéaire récurrente]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_{n+1}) = f(f(u_n)) = 6u_n - f(u_n) = 6u_n - u_{n+1} = -u_{n+1} + 6u_n$$

   qui est bien linéaire récurrente d'ordre 2.

2. Le polynôme caractéristique est $X^2 + X - 6 = (X + 3)(X - 2)$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \lambda(-3)^n + \mu 2^n$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   Mais f étant étant à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on doit avoir $\lambda = 0$ (sinon par croissances comparées $u_n \sim \lambda(-3)^n$ change infiniment de signe à partir d'un certain rang). Et $u_0 = a$ donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \cdot 2^n$.

3. Et $f(a) = u_1 = 2a$.

   Comme ceci est vrai pour tout a, on déduit : $f : x \mapsto 2x$.