Nom :

Interrogation 13

Exercice 1 Entourez le dinosaure que vous préférez entre les deux suivants :

ankylosaure vélociraptor

Faire de même avec les deux suivants :

stégosaure spinosaure

Exercice 2 Donner l'expression du terme général de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

On résout : $l = 2l - 1 \Leftrightarrow l = 1$. La suite $(v_n) = (u_n - 1)$ est géométrique de raison 2 donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n \cdot v_0 = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

puis :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1} + 1.$$

Exercice 3 Donner l'expression du terme général de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

On a le polynôme caractéristique : $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ qui possède 1 comme racine double. Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)$$

et avec u_0 et u_1 on a : $\lambda = 1$ et $\lambda + \mu = 3$ donc $\lambda = 1$ et $\mu = 2$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2n + 1.$$

Exercice 4 Donner l'expression du terme général de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = -1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

On a le polynôme caractéristique : $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ qui possède 1 et 2 comme racines simples. Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda 1^n + \mu 2^n$$

et avec u_0 et u_1 on a : $\lambda + \mu = 1$ et $\lambda + 2\mu = -1$ donc $\mu = -2$ et $\lambda = 3$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 - 2^{n+1}.$$

Exercice 5 On considère les matrices $A = (\max(i,j)) \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B = (i \cdot j) \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

1. Expliciter les matrices A et B.
2. Dire si les produits AB et BA ont un sens, et le cas échéant les calculer.

1. On a directement :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$
2. Aucun des produits n'a de sens.

Exercice 6
1. Rappeler, avec les hypothèses, la formule du binôme pour les matrices.
2. Rappeler la définition d'une matrice nilpotente, et donner un exemple d'une matrice nilpotente non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. L'utiliser pour calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Soient A, B deux matrices qui commutent et $n \in \mathbb{N}$. Alors :
$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$
2. Une matrice carrée N est dite nilpotente s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$ (la matrice nulle).
3. On applique le binôme avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = 2I_3$ (qui commutent bien comme B est scalaire). Et en utilisant que A est nilpotente avec $A^2 = 0$ (et toutes les puissances successives également), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^{n-k} A^k = 2^n I_3 + n2^{n-1} A = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$
Et la formule est même valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et même pour tout $n \in \mathbb{Z}$).