Interrogation 12

Exercice 1 On procède par double implications :

- Supposons que $A \cup B = B \cap C$. Alors :
  - $A \subset B$: Soit $a \in A$. Alors $a \in A \cup B$. Donc $a \in B \cap C$. Donc $a \in B$. D'où l'inclusion.
  - $B \subset C$: Soit $b \in V$. Alors $b \in A \cup B$. Donc $b \in B \cap C$. Donc $b \in C$. D'où l'inclusion.

  D'où la première implication.

- Supposons que $A \subset B$ et $B \subset C$. Montrons que $A \cup B = B \cap C$ par double inclusion :
  - $A \cup B \subset B \cap C$: soit $x \in A \cup B$. Alors :
    * ou bien $x \in A$: mais $A \subset B$ donc $x \in B$. Et $B \subset C$ donc $x \in C$. Donc $x \in B \cap C$;
    * ou bien $x \in B$: mais $B \subset C$ donc $x \in C$. Donc $x \in B \cap C$.

    D'où l'inclusion.
  - $B \cap C \subset A \cup B$: soit $x \in B \cap C$. Alors $x \in B$. Donc $x \in A \cup B$. D'où l'inclusion.

  D'où l'égalité par double inclusion, et donc la réciproque.

Et on a donc bien l'équivalence.

Exercice 2 $f \circ g \circ f$ est bijective donc :

- $f \circ (g \circ f)$ est surjective, donc f est surjective ;
- $(f \circ g) \circ f$ est injective, donc f est injective.

Donc f bijective puis $g = f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1}$ est bijective.

Exercice 3 Si g injective : soient $f_1, f_2 : E \to F$ telles que $g \circ f_1 = g \circ f_2$. Soit $x \in E$: $g \circ f_1 = g \circ f_2$ donc $g \circ f_1(x) = g(f_1(x)) = g \circ f_2(x) = g(f_2(x))$ puis $f_1(x) = f_2(x)$ (par injectivité de g). Comme ceci est vrai pour tout $x \in E$, on a bien $f_1 = f_2$.

Réciproque : soient $y_1, y_2 \in F$ tels que $g(y_1) = g(y_2)$. Posons $f_1, f_2 : E \to F$ définies par $f_1 : x \mapsto y_1$ et $x \mapsto y_2$. Alors $g \circ f_1 = g \circ f_2$ (ce sont les applications constantes de valeur $g(y_1) = g(y_2)$). Donc $f_1 = f_2$. Donc $y_1 = y_2$. D'où l'injectivité de g.

Exercice 4 1. Soient $A, A' \in \mathcal{P}(E)$.

- Supposons que $f(A) \subset f(A')$:
  Soit $x \in A$.
  Alors $f(x) \in f(A)$.
  Donc $f(x) \in f(A')$.
  Ce qui veut dire que : $x \in f^{-1}(f(A'))$.
  Et donc : $A \subset f^{-1}(f(A'))$
- Réciproquement, supposons que $A \subset f^{-1}(f(A'))$:
  Soit $y \in f(A)$.
  Alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
  Et donc il existe $x \in f^{-1}(f(A'))$ tel que $y = f(x)$.
  Comme $x \in f^{-1}(f(A'))$, alors $f(x) \in f(A')$.
  Et donc $y \in f(A')$.
  Et finalement : $f(A) \subset f(A')$.

2. On déduit que :
   - si f est injective : soit $A \in \mathcal{P}(E)$: comme $f(A) \subset f(A)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$ par le point précédent. Pour l'inclusion réciproque, soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A)$. Donc il existe $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$. Par injectivité, $x = x'$ donc $x \in A$. D'où l'inclusion réciproque ;
   - si f vérifie l'assertion : soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $x_1 \in f^{-1}(f(\{x_2\})) = \{x_2\}$ donc $x_1 = x_2$. D'où l'injectivité de f.

Exercice 5

1. Du fait des valeurs de u et v, on a les inégalités pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n v_n \leq u_n \leq 1 \text{ et } u_n v_n \leq v_n \leq 1$$

   et on conclut par encadrement que $\lim u_n = \lim v_n = 1$;

2. On a les inégalités pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a \geq u_n = (u_n + v_n) - v_n \geq (u_n + v_n) - b \text{ et } b \geq v_n = (u_n + v_n) - u_n \geq (u_n + v_n) - a$$

   et on conclut par opération sur les limites et encadrement que $\lim u_n = a$ et que $\lim v_n = b$.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{(u_n + v_n) + (u_n - v_n)}{2}$. Donc par opération sur les limites : $\lim u_n = \dfrac{a+b}{2}$.

   Et de même en utilisant que $v_n = \dfrac{(u_n + v_n) - (u_n - v_n)}{2}$ on déduit $\lim v_n = \dfrac{a-b}{2}$.

4. On fait apparaître des formes canoniques : $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 = (u_n + v_n/2)^2 + 3/4 v_n^2 \geq 3/4 v_n^2 \geq 0$. Donc par encadrement : $\lim \frac{3}{4} v_n^2 = 0$ puis $\lim |v_n| = 0$ (par continuité de $x \mapsto \sqrt{\frac{4}{3}x}$ en 0). Et finalement par encadrement, comme $-|v_n| \leq v_n \leq |v_n|$ on trouve : $\lim v_n = 0$.

   Le même raisonnement montre que $\lim u_n = 0$ également.

Exercice 6 1. Par décroissance de (u_n), on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0 \text{ et } S_{2n+3} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0$$

ce qui donne les monotonies.

Et comme (u_n) tend vers 0 :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \to 0$$

Donc les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

2. Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent donc vers la même limite l, qui est la limite de (S_n), qui converge bien. Et on a par propriétés des suites adjacentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+1} \leq l \leq S_{2n}$$

donc $|S_{2n} - l| = S_{2n} - l \leq S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}$.

Et de même pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+1} \leq l \leq S_{2n+2}$$

donc $|S_{2n+1} - l| = l - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = u_{2n+2}$.

Ce qui prouve bien l'inégalité demandée par disjonction de cas, suivant la parité de n.