Interrogation 12

Exercice 1 Soient A, B, C trois ensembles. Montrer que :

$$A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} A & \subset & B \\ B & \subset & C \end{array} \right. .$$

Exercice 2 Soient E, F deux ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to E$. On suppose que $f \circ g \circ f$ est bijective.

Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 3 Soient E, F, G trois ensembles et $g : F \to G$.

Montrer que g est injective si, et seulement si : $\forall f_1, f_2 : E \to F,\ g \circ f_1 = g \circ f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$.

Exercice 4 Soit $f : E \to F$:

1. Montrer que pour tous $A, A' \in \mathcal{P}(E)$: $f(A) \subset f(A') \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(f(A'))$.
2. En déduire que f est injective si, et seulement si : $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A = f^{-1}(f(A))$.

Exercice 5 Montrer que les suites réelles (u_n) et (v_n) convergent dans les cas suivants, et préciser leurs limites :

1. (u_n) et (v_n) sont à valeurs dans $[0; 1]$ et $\lim u_n v_n = 1$;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq a$ et $v_n \leq b$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) et $\lim u_n + v_n = a + b$;
3. les suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent respectivement vers $a, b \in \mathbb{R}$;
4. $\lim (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = 0$.

Exercice 6 On considère (u_n) une suite décroissante tendant vers 0 et on pose pour $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

1. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que la suite (S_n) converge vers un réel l, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|S_n - l| \leq u_{n+1}$.