Nom :

Interrogation 11

Exercice 1 Donner des équivalents en les points a considérés des quantités suivantes :

1. $a = 0$: $\dfrac{x^2\cos(x)}{\tan(x)+\sin(x)} \underset{a\to 0}{=} \dfrac{x^2\,(1+\mathrm{o}(1))}{x+\mathrm{o}(x)+x+\mathrm{o}(x)} \underset{a\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2x} \underset{a\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$
2. $a = 0$: $(e^{2x}-3)\ln(5+4x^2) \underset{a\to 0}{\sim} -2\ln(5)$
3. $a = +\infty$: $(e^{2x}-3)\ln(5+4x^2) \underset{a\to +\infty}{\sim} 2e^{2x}\ln(x)$
4. $a = +\infty$: $2x\ln(x) - e^{3x}\ln(x) + \sqrt{x}e^x \underset{a\to +\infty}{\sim} -e^{3x}\ln(x)$

Exercice 2 Soit $x \in \mathbb{R}$:

1. Soient $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $x \geq y$. Pour quelle(s) valeurs(s) l'écriture $x - y$ est-elle une forme indéterminée ?
2. Montrer que, dans ce cas, on peut trouver une suite (u_n) et une suite (v_n) tendant vers x et y respectivement, telles que :
   (a) $u - v$ diverge sans avoir de limite ;
   (b) $u - v$ tend vers $+\infty$;
   (c) $u - v$ tend vers $-\infty$;
   (d) $u - v$ tend vers 37 ;

1. Les seules formes indéterminées sont pour $x = y = \pm\infty$: si x et y sont finis c'est clair ; si un seul des deux est infini aussi ; et reste le cas $+\infty - (-\infty) = +\infty$ qui n'est pas une FI.
2. (a) $(u_n) = (n + (-1)^n)$ et $(v_n) = (n)$
   (b) $(u_n) = (2n)$ et $(v_n) = (n)$
   (c) $(u_n) = (n)$ et $(v_n) = (2n)$
   (d) $(u_n) = (n + 37)$ et $(v_n) = (n)$

Exercice 3 Soit u une suite réelle.

1. La suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

2. La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A.$$

Exercice 4

1. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si elles sont monotones de monotonies opposées, et que leur différence tend vers 0. Et alors les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   - $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$
   - $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = -\dfrac{1}{n(n+1)^2} < 0$
   - $v_n - u_n = \dfrac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

   Et donc (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, et leur différence tend vers 0 : elles sont adjacentes. Donc elles convergent vers une même limite (qui est $\dfrac{\pi^2}{6}$, mais ce n'est pas demandé, et pas immédiat...).

Exercice 5 Soit (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$. Exprimer u_n en fonction de n.

On a une suite arithmético-géométrique. On résout :

$$x = \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow x = 2$$

donc $(v_n) = (u_n - 2)$ est géométrique, de raison $1/2$, et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 4 - 2 = 2$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{2}^{n} v_0 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

puis en revenant à $(u_n) = (v_n + 2)$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2^{n-1}} + 2$$

et on note au passage que (u_n) est convergente (et tend vers 2).