DS n^{o}7

I Exercices

Exercice 1

1. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \text{ln} + \mu \text{sin} + \nu \text{exp} = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \lambda \text{ln}(x) + \mu \text{sin}(x) + \nu \text{exp}(x) = 0.$$

On pourrait évaluer en trois points (par exemple, π, 3π puis $\pi/2$) : les deux premières valeurs donnent un système homogène inversible en λ et ν, qui sont donc nuls, et en évaluant en $\pi/2$ on trouve $\mu = 0$ ce qui prouve que la famille est libre.

On on fait tendre x vers 0 (ce qui donne $\lambda = 0$) puis en $+\infty$ (ce qui donne $\nu = 0$) et on évalue en $\pi/2$ (ce qui donne $\mu = 0$).

Dans les deux cas, on prouve bien que la famille est libre.

2. On résout le système (qui n'a qu'une équation). On a :

$$x + y + z + t = 0 \Leftrightarrow x = -y - z - t$$

et ainsi $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Ce ci assure que F est un espace vectoriel, et que la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ en est une famille génératrice.

Reste à montrer qu'elle est libre : soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Alors, en regardant les trois dernières coordonnées : $\lambda = \mu = \nu = 0$. Donc la famille est libre.

3. La suite nulle tend vers 0, donc c'est un élément de G.

Soient $(u_n), (v_n) \in G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors par opération sur les limites, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ tend vers $\lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$. Donc est un élément de G.

Par caractérisation des sous-espaces vectoriels : G est un espace vectoriel, en tant que sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

4. Montrons que c'est un espace vectoriel si, et seulement si, $a = 0$ (le choix de b n'a pas d'importance) :

   - si c'est un espace vectoriel : il contient la fonction nulle, donc nécessairement $a = 0$;

- réciproquement, si $a = 0$: il contient la fonction nulle. Et pour $f, g \in H_{0,b}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\lambda f + \mu g)(b) = \lambda f(b) + \mu g(b) = 0$$

donc $\lambda f + \mu g \in H_{0,b}$.
Et par caractérisation, c'est bien un espace vectoriel.

D'où l'équivalence.

Exercice 2

1. Par définition, on a déjà que F est un sev de E : c'est le sev engendré par u_0.

Pour G :

- avec $x = y = z = t = 0$, on a bien $x + y = 0 = z + t$, donc $(0, 0, 0, 0) \in G$;
- soient $u, v \in G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Notons $u = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $v_=(x_2, y_2, z_2, t_2)$. Posons $w = \lambda u + \mu v$. Alors : $w = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2, \lambda t_1 + \mu t_2)$. Mais on a, comme $u, v \in G$:

$$(\lambda x_1+\mu x_2)+(\lambda y_1+\mu y_2) = \lambda(x_1+y_1)+\mu(x_2+y_2) = \lambda(t_1+z_1)+\mu(t_2+z_2) = (\lambda z_1+\mu z_2)+(\lambda t_1+\mu t_2)$$

ce qui prouve que $w \in G$.

Et finalement G est bien un sev de E.

Pour les bases :

- par définition, la famille (u_0) engendre F, et elle est libre (constituée d'un vecteur non nul) donc c'est une base de F ;
- pour $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, on a par définition de G :

$$(x, y, z, t) \in G \Leftrightarrow x = -y + z + t$$

et ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ engendre G. Et elle est libre (car famille graduée, ou on peut poser le système si on préfère) donc c'est une base de G.

2. Pour montrer que F et G sont en somme directe, il suffit de montrer que $F \cap G = \{0\}$ (et même seulement $F \cap G \subset \{0\}$). Soit $u \in F \cap G$. Alors :

- comme $u \in F = \text{Vect}(u_0)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $u = \lambda u_0 = (\lambda, \lambda, 0, 0)$;
- comme $u \in G$: $2\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$;

et finalement $u = 0$: les espaces F et G sont bien en somme directe.

3. Avec les mêmes notations, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$u - \lambda u_0 = (x - \lambda, y - \lambda, z, t)$$

et donc :

$$u - \lambda u_0 \in G \Leftrightarrow x - \lambda + y - \lambda = z + t \Leftrightarrow \lambda = \frac{x + y - z - t}{2}$$

ce qui montre bien l'existence et l'unicité d'un tel λ.

4. Comme on a déjà montré que F et G sont en somme directe, il reste à prouver que $E = F + G$ (et même seulement $E \subset F + G$).

   Soit $u \in E$. Notons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u - \lambda u_0 \in G$. Alors :

$$u = \underbrace{\lambda u_0}_{\in F} + \underbrace{u - \lambda u_0}_{\in G} \in F + G$$

   Et finalement : $E = F \oplus G$, c'est-à-dire que les espaces F et G sont supplémentaires.

5. D'après la question 3, on a $\lambda = \dfrac{1+3-5-7}{2} = -4$.

   Et la décomposition est : $(1,3,5,7) = \underbrace{(-4,-4,0,0)}_{=4u_0 \in F} + \underbrace{(5,7,5,7)}_{\in G}$.

Exercice 3 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in [-1; +\infty[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2u_n}{4}$$

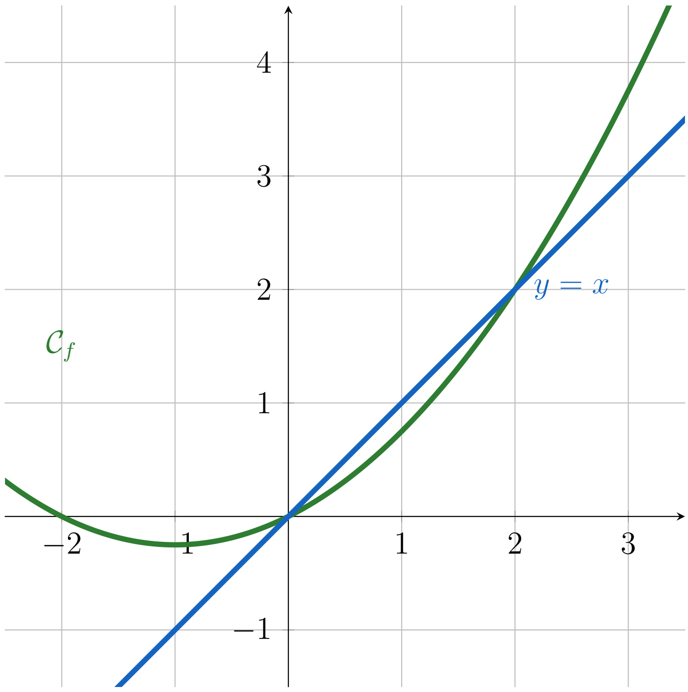
et on pose pour tout l'exercice $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 2x}{4}$.

1. La fonction f est une fonction polynomiale du second degré de coefficient dominant $1/4 > 0$ et de racines -2 et 0, d'où les variations :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

   Et $f - \mathrm{id}$ est aussi polynomiale du second degré de coefficient dominant $1/4 > 0$ et de racines 0 et 2, ce qui donne le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. 

3. On pourrait procéder par récurrence. On procède par disjonction de cas :

   - si $n = 0$: $u_n = u_0 \geqslant -1$ par hypothèse ;
   - si $n > 0$: $u_n = f(u_{n-1}) \in f(\mathbb{R}) = [-1/4; +\infty[\subset [-1; +\infty[$ d'après les variations de f.

4. La suite (u_n) est à valeurs dans $[-1; +\infty[$ et f est (strictement) croissante sur $[-1; +\infty[$. Donc la suite (u_n) est monotone. Sa monotonie est donnée par le signe de $u_1 - u_0 = (f - \mathrm{id})(u_0)$, et ainsi :

   - si $u_0 < 0$: elle est croissante ;
   - si $u_0 \in]0; 2[$: elle est décroissante ;
   - si $u_0 > 2$: elle est croissante ;
   - si $u_0 = 0$ ou 2 : elle est constante.

5. (a) La suite (u_n) est constante, et donc elle converge.

   (b) La suite (u_n) est décroissante, et minorée (par -1 d'après la question 3) donc converge. Par continuité de f, sa limite est un point fixe de f, donc 0 ou 2. Et par décroissance, sa limite l est au plus u_0, donc $l \leqslant u_0 < 2$. Donc $l = 0$: la suite converge vers 0.

   (c) On a directement l'inégalité par récurrence :

   - initialisation : pour $n = 0$: $u_0 \in [-1; 0[$ par hypothèse ;
   - hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in [-1; 0[$. Alors par stricte croissante de f sur $[-1; 0]$, on a : $u_{n+1} = f(u_n) \in [f(-1); f(0)[= [-1/4; 0[\subset [-1; 0[$. D'où l'hérédité.

   D'où l'inégalité par récurrence. La suite (u_n) est donc croissance (par la question 4) majorée (par 0) donc converge vers un point fixe de f (par continuité) qui est au plus 0 (par la majoration). Donc la suite converge vers 0 (l'autre point fixe étant trop grand).

   (d) On a directement l'inégalité par récurrence :

   - initialisation : pour $n = 0$: $u_0 > 2$ par hypothèse ;
   - hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > 2$. Alors par stricte croissante de f sur $[2; +\infty[$, on a : $u_{n+1} = f(u_n) > f(2) = 2$. D'où l'hérédité.

D'où l'inégalité par récurrence.

La suite (u_n) est donc croissance (par la question 4) donc elle a une limite l (finie ou non) qui vérifie $l \geqslant u_0 > 2$ (par la monotonie). Mais, par continuité de f, si l était finie, ce serait un point fixe de f. Comme f ne possède pas de point fixe strictement plus grand que 2, ce cas est exclu. Donc $l = +\infty$: la suite (u_n) diverge en tendant vers $+\infty$.

Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n : x \mapsto x^n \ln(x)$.

1. La fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à cause du ln qui apparaît dans son expression.

2. Notons déjà que, si $x \in]0;1]$, on a : $\ln(x) \leqslant 0$ et $x^n > 0$. Par produit, il vient : $f_n(x) \leqslant 0$, et donc $f_n(x) \neq 1$.

   L'équation $f_n(x) = 1$ n'a donc pas de solution sur $]0;1]$.

   Sur $[1;+\infty[$, la fonction f_n est continue (en tant que produit de fonctions continues), et même dérivable (en tant que produit de fonctions dérivables). Sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in [1;+\infty[,\ f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(x) + x^n \cdot \frac{1}{x} = x^{n-1} \cdot (n\ln(x) + 1) > 0$$

   donc f_n est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

   On a $f_n(1) = 0$, et par limite d'un produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

   Par théorème de la bijection continue, la fonction f_n réalise une bijection strictement croissante de $[1;+\infty[$ dans $[0;+\infty[$.

   Et donc l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution dans $[1;+\infty[$.

   Comme $f_n(1) = 0$, on a même $x_n \in]1;+\infty$, c'est-à-dire $x_n > 1$.

3. Par croissance de la fonction f_n, pour montrer que (x_n) est strictement décroissante, il suffit de montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$.

   Mais on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n \ln(x_{n+1}) = \frac{x_{n+1}^{n+1}\ln(x_{n+1})}{x_{n+1}} = \frac{f_{n+1}(x_{n+1})}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_{n+1}} < 1 = f_n(x_n)$$

   en utilisant que $f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) = 1$, et que $x_{n+1} > 1$.

   Ce qui prouve bien le résultat voulu.

   Donc (x_n) est strictement décroissante.

4. En tant que suite décroissante minorée (par 1), la suite (x_n) est donc convergente. Sa limite ℓ vérifie $\ell \in [1;+\infty[$.

5. Supposons par l'absurde que $\ell \neq 1$. Comme on a déjà que $\ell \in [1;+\infty[$, on a donc : $l > 1$.

   Par décroissance de la suite (x_n), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant l$$

   et donc : $f_n(x_n) = x_n^n \ln(x) \geqslant \ell^n \ln(\ell)$.

   Comme $l > 1$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} l^n = +\infty$ et $\ln(l) > 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} l^n \ln(l) = +\infty$.

   Par encadrement, il vient : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_n) = +\infty$.

Mais la suite $(f_n(x_n))$ est constante de valeur 1.

D'où la contradiction.

Donc $\ell = 1$.

Remarque : au lieu de faire une minoration, on pouvait aussi voir par calcul direct que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = +\infty$ (le fait que $\ell > 1$ assure qu'il n'y a pas de forme indéterminée).

II Problème

II.1 Structure de E

1. On utilise directement les expressions de $M(0,1)$ et $M(1,0)$. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Montrons directement que $E = \text{Vect}(A,B)$, ce qui prouvera les deux parties de la questions.

   On a par définition pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = xA + yB$$

   ce qui assure que :

$$E = \{M(x,y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\} = \{xA + yB \,|\, x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(A,B).$$

3. Les matrices A et B ne sont pas proportionnelles (on peut voir qu'elles des 0 en des coordonnées différentes) : en tant que famille à deux vecteurs, cela assure que la famille (A,B) est libre.

4. On déduit que la famille (A,B) engendre E et est libre : c'est une base de E.

   Si $x, y \in \mathbb{R}$, on a vu que $M(x,y) = xA + yB$: ainsi les coordonnées de $M(x,y)$ dans la base (A,B) sont (x,y).

5. (a) Raisonnons dans la base (A,B). Pour $\lambda, \mu, x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lambda M(a,b) + \mu M(c,d) = (\lambda a + \mu c)A + (\lambda b + \mu d)B \text{ et } M(x,y) = xA + yB$$

   et par unicité de l'écriture (comme (A,B) est libre) :

$$\lambda M(a,b) + \mu M(c,d) = M(x,y) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda a + \mu c & = & x \\ \lambda b + \mu d & = & y \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   ce qui donne bien l'équivalence demandée.

   (b) Par définition, la famille $(M(a,b), M(c,d))$ est une base de E si, et seulement si, tout élément de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $M(a,b)$ et $M(c,d)$. Cela veut dire que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, l'équation (d'inconnues $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) $\lambda M(a,b) + \mu M(c,d) = M(x,y)$ admet une unique solution.

   Par la question précédente, c'est équivalent au fait que l'équation $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ possède une unique solution.

Or, c'est le cas si, et seulement si, la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible.

Et finalement la famille $(M(a,b), M(c,d))$ est une base si, et seulement si, la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible. Et c'est le cas si, et seulement si : $ad - bc \neq 0$ (condition pour qu'un système linéaire 2×2 admette une unique solution).

II.2 Réduction des éléments de E

6. On échelonne P. On trouve que P est bien inversible avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Un calcul direct donne :

$$D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Posons $D(x,y) = P^{-1}M(x,y)P$. Il suffit de montrer que $D(x,y)$ ainsi définie est diagonale.

   Or, on a : $M(x,y) = xA + yB$. Par bilinéarité de la multiplication matricielle (distributivité à gauche et à droite) :

$$D(x,y) = P^{-1}(xA + yB)P = \left(xP^{-1}AP\right) + \left(yP^{-1}BP\right) = xD_A + yD_B = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x - y & 0 \\ 0 & 0 & 3x - y \end{pmatrix}$$

   et donc $D(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x - y & 0 \\ 0 & 0 & 3x - y \end{pmatrix}$ convient, et est bien diagonale.

9. Comme P et P^{-1} sont inversible, la matrice $M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}$ est inversible si, et seulement si, $D(x,y)$ est inversible.

   Or, en tant que matrice diagonale, $D(x,y)$ est inversible si, et seulement si, tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Donc $M(x,y)$ est inversible si, et seulement si :

$$x \neq 0, \ y \neq 2x \text{ et } y \neq 3x.$$

   Par inverse d'une matrice diagonale, sous ces conditions, on a :

$$D(x,y)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2x - y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3x - y} \end{pmatrix}.$$

   Par inverse d'un produit, pour de tels x, y :

$$M(x,y)^{-1} = \left(PD(x,y)P^{-1}\right)^{-1} = (P^{-1})^{-1}D(x,y)^{-1}P^{-1} = PD(x,y)^{-1}P^{-1}.$$

   Au passage, on trouve bien que A est inversible, cohérent avec le fait que D_A est inversible, et que B n'est pas inversible, cohérent avec le fait que D_B ne l'est pas non plus.

10. (a) Par définition de D_B :

$$B^2 = (PD_BP^{-1})^2 = PD_B^2P^{-1} = P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1} = PD(0,-1)P^{-1} = M(0,-1)$$

et donc $B^2 \in E$ (et même on vient de montrer que $B^2 = -B$, qui est donc dans E comme c'est un espace vectoriel).

(b) De même avec D_A :

$$A^2 = (PD_AP^{-1})^2 = PD_A^2P^{-1} = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}P^{-1}$$

et, pour montrer que ce n'est pas un élément de E, il suffit de voir que $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}$ n'est pas de la forme $D(x,y)$. Pour cela, on résout l'équation $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix} = D(x,y)$ (d'inconnues x, y). On a :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix} = D(x,y) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}1&=&x\\4&=&2x-y\\9&=&3x-y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}x&=&1\\y&=&-2\\y&=&-6\end{array}\right.$$

qui n'a pas de solution.
Et ainsi : $A^2 \notin E$.

(c) Les matrices D_A et D_B sont diagonales, donc commutent. On déduit que :

$$AB = PD_AP^{-1}PD_BP^{-1} = PD_AD_BP^{-1} = PD_BD_AP^{-1} = PD_BP^{-1}PD_AP^{-1} = BA.$$

donc A et B commutent.

II.3 Application à l'étude de suites

11. On a par définition :

$$X_0 = \begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

De plus, par relation de récurrence satisfaite par les suites :

$$a_1 = 3a_0 + 4b_0 - c_0 = 3,\ b_1 = -4a_0 - 5b_0 + c_0 = -4 \text{ et } c_1 = -6a_0 - 8b_0 + 2c_0 = -6$$

et donc :

$$X_1 = \begin{pmatrix}3\\-4\\-6\end{pmatrix}.$$

12. Par définition, on a pour tout $x \in \mathbb{N}$:

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix}3a_n + 4b_n - c_n\\-4a_n - 5b_n + c_n\\-6a_n - 8b_n + 2c_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&4&-1\\-4&-5&1\\-6&-8&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix} = CX_n$$

où $C = \begin{pmatrix}3&4&-1\\-4&-5&1\\-6&-8&2\end{pmatrix} = M(1,3) \in E$ (donc $x = 1$ et $y3$ conviennent).

13. On procède par récurrence :

    - pour $n = 0$: par définition, $C^0 = \mathrm{I}_3$, et on a bien $X_0 = \mathrm{I}_3 X_0$;
    - hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = C^n X_0$. Alors :

    $$X_{n+1} = CX_n = C \cdot C^n X_0 = C^{n+1} X_0$$

    ce qui prouve l'hérédité.

    D'où le résultat par récurrence.

14. Par calcul direct, on a :

$$C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

15. On a :

$$C = M(1,3) = PD(1,3)P^{-1}$$

et en passant à la puissance n, pour $n \in \mathbb{N}$, les facteurs $P^{-1}P$ du produit matriciels disparaissent, ce qui donne :

$$C^n = PD(1,3)^n P^{-1}.$$

Mais, d'après l'expression de $D(x,y)$, on a : $D(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $D(1,3)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En réinjectant, il vient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$C^n = \left\{ \begin{array}{ccc} C & \text{si} & n \text{ impair} \\ C^2 & \text{si} & n \text{ pair} \end{array} \right. = \begin{pmatrix} 1 - 2\cdot(-1)^n & 2 - 2\cdot(-1)^n & -1 \\ -1 + 3\cdot(-1)^n & -2 + 3\cdot(-1)^n & 1 \\ -2 + 4\cdot(-1)^n & -4 + 4\cdot(-1)^n & 2 \end{pmatrix}$$

Et par la question précédente :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = X_n = C^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\cdot(-1)^n \\ -1 + 3\cdot(-1)^n \\ -2 + 4\cdot(-1)^n \end{pmatrix}$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = 1 - 2\cdot(-1)^n,\ b_n = -1 + 3\cdot(-1)^n,\ c_n = -2 + 4\cdot(-1)^n.$$

les formules n'étant pas valables pour $n = 0$ (au même titre que l'expression précédente de C^n pour $n = 0$).

II.4 Application à l'étude d'un système d'équations différentielles

Remarque : petit cadeau à cette question comme on donne en fait l'expression de P^{-1} dans l'énoncé.

16. Soient f_1, f_2, f_3 constantes de valeurs respectives $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors elles sont solution du système (S) si, et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & = & 3x + 2y \\ 0 & = & -3x - 2y \\ 0 & = & -4x - 4y + z \end{array} \right.$$

c'est-à-dire si, et seulement si (par pivot par exemple) : $x = -z/2$ et $y = 3z/4$.

Et donc les solutions forment l'ensemble $\{(-z/2, 3z/4, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1/2, 3/4, 1)) = \text{Vect}((-2, 3, 4))$.
Et finalement, les solutions constantes sont les fonctions de la forme :

$$f_1 : x \mapsto -2\lambda, \ f_2 : x \mapsto 3\lambda, \ f_3 : x \mapsto 4\lambda$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

17. On montre séparément les deux implications :

   - si les f_i sont dérivables : chacune des fonctions g_1, g_2, g_3 est combinaison linéaire des fonctions f_1, f_2, f_3, qui sont dérivables ; par linéarité de la dérivation, les fonctions g_i sont bien dérivables ;
   - si les g_i sont dérivables : on a $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \ \left\{ \begin{array}{rcl} f_1(x) & = & g_1(x) - 2g_2(x) + g_3(x) \\ f_2(x) & = & -g_1(x) + 3g_2(x) - g_3(x) \\ f_3(x) & = & -2g_1(x) + 4g_2(x) - g_3(x) \end{array} \right. .$$

   Et donc les f_i sont chacune combinaison linéaire en les f_i : à nouveau par linéarité, les f_i sont dérivables.

   On a donc bien l'équivalence demandée.

18. Écrivons tout matriciellement. Notons déjà que, par la question précédente, comme les fonctions f_1, f_2, f_3 sont dérivables si, et seulement si, les fonctions g_1, g_2, g_3 le sont, il suffit de considérer $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ dérivables telles que $G = P^{-1}F$.
   On reconnaît l'écriture matricielle pour (S) : $F' = M(1,2) \cdot F$. Et ainsi :

   $$F \text{ solution de } (S) \Leftrightarrow F' = M(1,2)F \Leftrightarrow P^{-1}F' = P^{-1}M(1,2)PP^{-1}F \Leftrightarrow G' = D(1,2)G$$

   où l'équivalence au milieu vient de l'inversibilité de P et de P^{-1} (donc multiplier, à gauche ou à droite, par l'une des deux préserve l'équivalence).
   La dernière équation matricielle s'écrit :

   $$\begin{pmatrix} g_1' \\ g_2' \\ g_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ 0 \\ g_3 \end{pmatrix}$$

   qui est bien de la forme voulue, avec $\alpha = \gamma = 1$ et $\beta = 0$.

19. On résout séparément chaque équation de (S'). On a à chaque fois une équation différentielle linéaire homogène du premier degré à coefficients constants. On trouve que (g_1, g_2, g_3) est solution de (S') si, et seulement si, il existe des réels λ, μ, ν (unique, déterminés entièrement par les conditions initiales, comme on le verra après) tels que :

   $$g_1 : x \mapsto \lambda e^x, \ g_2 : x \mapsto \mu \text{ et } g_3 : x \mapsto \nu e^x.$$

   Comme $F = PG$, on déduit que (f_1, f_2, f_3) est solution de (S) si, et seulement si, il existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que :

   $$\left\{ \begin{array}{lll} f_1 : & x \mapsto & g_1(x) - 2g_2(x) + g_3(x) = (\lambda + \nu)e^x - 2\mu \\ f_2 : & x \mapsto & -g_1(x) + 3g_2(x) - g_3(x) = (-\lambda - \nu)e^x + 3\mu \\ f_3 : & x \mapsto & -2g_1(x) + 4g_2(x) - g_3(x) = (-2\lambda - \nu)e^x + 4\mu \end{array} \right.$$

20. Des solutions de (S) vérifient cette condition initiale si, et seulement si, les réels λ, μ, ν correspondants vérifient :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ f_2(x_0) \\ f_3(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+\nu)e^{x_0} - 2\mu \\ (-\lambda-\nu)e^{x_0} + 3\mu \\ (-2\lambda-\nu)e^{x_0} + 4\mu \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda e^{x_0} \\ \mu \\ \nu e^{x_0} \end{pmatrix}$$

et par inversibilité de P, on trouve directement que le système est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} \lambda e^{x_0} \\ \mu \\ \nu e^{x_0} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

d'où l'unicité de λ, μ, ν, car l'unique solution avec condition initiale est donnée par :

$$\lambda = a'e^{-x_0}, \ \mu = b' \text{ et } \nu = c'e^{-x_0}.$$

21. D'après la question 19, on a directement que les solutions de (S) forment l'ensemble $\mathcal{F}$ suivant :

$$\mathcal{F} = \left\{ x \mapsto \begin{pmatrix} (\lambda+\nu)e^{x} - 2\mu \\ (-\lambda-\nu)e^{x} + 3\mu \\ (-2\lambda-\nu)e^{x} + 4\mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}(F_1, F_2, F_3)$$

où :

$$F_1 : x \mapsto \begin{pmatrix} e^x \\ -e^x \\ -2e^x \end{pmatrix}, \ F_2 : x \mapsto \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } F_3 : x \mapsto \begin{pmatrix} e^x \\ -e^x \\ -2e^x \end{pmatrix}$$

Cette écriture assure que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel, et qu'il est engendré par la famille (F_1, F_2, F_3).

L'unicité prouvée à la question précédente assure que la famille (F_1, F_2, F_3) est libre.

Et ainsi : $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel, et (F_1, F_2, F_3) en est une base.

Remarque : on trouve au passage que l'ensemble des solutions constantes trouvé en question 16 est $\mathrm{Vect}(F_2)$, qui est un sev de $\mathcal{F}$ (c'est même une droite vectorielle).