DS n^{o}7

I Exercices

Exercice 1

1. Montrer que la famille $(\ln, \sin, \exp)$ est libre dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
2. Montrer que l'ensemble $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+y+z+t = 0\}$ est un espace vectoriel, et en donner une base.
3. Montrer que l'ensemble $G = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \lim\, u_n = 0\}$ est un espace vectoriel.
4. Dire pour quelle(s) valeur(s) de $a, b \in \mathbb{R}$ l'ensemble $H_{a,b} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(b) = a\}$ est un espace vectoriel et le prouver.

Exercice 2

On considère $E = \mathbb{R}^4$. On note $u_0 = (1,1,0,0)$ et on pose :

$$F = \mathrm{Vect}(u_0) \text{ et } G = \{(x,y,z,t) \in E \,|\, x+y = z+t\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, et donner une base de chacun d'eux.
2. Montrer que F et G sont en somme directe.
3. Soit $u = (x,y,z,t) \in E$. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$, que l'on donnera explicitement en fonction de x, y, z, t, tel que $u - \lambda u_0 \in G$.
4. Déduire des questions précédentes que F et G sont supplémentaires dans E.
5. Donner la décomposition de $(1,3,5,7)$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Exercice 3 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in [-1; +\infty[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2u_n}{4}$$

et on pose pour tout l'exercice $f : x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{4}$.

1. Donner les variations de f sur $\mathbb{R}$ et étudier le signe de $f - \mathrm{id}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Représenter la courbe de f ainsi que la première bissectrice dans un même repère.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \in [-1; +\infty[$.
4. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est monotone. On précisera bien sa monotonie suivant la valeur de u_0.
5. (a) On suppose ici que $u_0 \in \{0; 2\}$. Que penser de (u_n) ?
   (b) On suppose ici que $u_0 \in]0; 2[$: montrer que (u_n) converge et donner sa limite.
   (c) On suppose ici que $u_0 \in [-1; 0[$: montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \in [-1; 0[$. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.

(d) On suppose ici que $u_0 \in]2;+\infty[$: montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \in]2;+\infty[$. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?

Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n : x \mapsto x^n \ln(x)$.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f_n.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, qu'on notera x_n, et que $x_n > 1$.

   Indication : on pourra commencer par montrer qu'il n'y a pas de solution dans $]0;1]$.

   Ceci définit la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

3. Montrer que la suite (x_n) ainsi définie est strictement décroissante.

4. En déduire que (x_n) converge vers une limite ℓ, et donner un encadrement de ℓ sans effectuer de calcul supplémentaire.

5. Montrer que $\ell = 1$.

   Indication : on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

II Problème

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ comme :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}.$$

On pose également $A = M(1, 0)$, $B = M(0, 1)$ et $E = \{M(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

II.1 Structure de E

1. Expliciter les matrices A et B.

2. Montrer que E est un espace vectoriel, et qu'il est engendré par les matrices A et B.

3. Montrer que la famille (A, B) est libre.

4. En déduire que (A, B) est une base de E, et donner les coordonnées de la matrice $M(x, y)$, pour $x, y \in \mathbb{R}$, dans cette base.

5. On fixe pour cette question $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et on cherche une condition pour que la famille $(M(a, b), M(c, d))$ soit une base de E.

   (a) Soient $\lambda, \mu, x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on a l'équivalence :

   $$\lambda M(a,b) + \mu M(c,d) = M(x,y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   Indication : on pourra utiliser judicieusement les coordonnées des éléments de E dans la base (A, B).

   (b) Conclure.

II.2 Réduction des éléments de E

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Montrer que P est inversible et donner P^{-1}.

   Attention : l'expression de P^{-1} étant utile pour la suite, on vérifiera bien les calculs effectués.

7. On pose $D_A = P^{-1}AP$ et $D_B = P^{-1}BP$. Donner les expressions de D_A et D_B.

8. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. À l'aide de la question précédente, montrer qu'il existe une matrice diagonale $D(x,y)$ telle que :
$$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}.$$

9. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $x, y \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $M(x,y)$ soit inversible, et donner alors une expression de $M(x,y)^{-1}$ à l'aide de P, P^{-1} et $D(x,y)^{-1}$.

   Remarque : on vérifiera bien que cette condition est cohérente avec l'inversibilité ou non de A et de B.

10. En déduire également, avec peu de calculs, les réponses aux questions suivantes, qu'il faudra justifier soigneusement :

    (a) La matrice B^2 est-elle un élément de E ?

    (b) La matrice A^2 est-elle un élément de E ?

    (c) Les matrices A et B commutent-elles ?

II.3 Application à l'étude de suites

On considère ici trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) définies par :

$$a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ c_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} &= -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} &= -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

11. Déterminer X_0 et calculer X_1.

12. Montrer qu'il existe une matrice $C \in E$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = CX_n$$
    en précisant bien les deux réels x, y tels que $C = M(x,y)$.

13. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = C^n X_0.$$

14. Calculer C^2.

15. À l'aide de la partie précédente, donner une expression de C^n puis de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

II.4 Application à l'étude d'un système d'équations différentielles

On considère ici le système différentiel :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{lcl} f_1' & = & 3f_1 + 2f_2 \\ f_2' & = & -3f_1 - 2f_2 \\ f_3' & = & -4f_1 - 4f_2 + f_3 \end{array} \right. .$$

où f_1, f_2, f_3, fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, sont les inconnues.

On pose $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ et $F' = \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \end{pmatrix}$. On définit les fonctions g_1, g_2, g_3 dérivables par :

$$G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{lcl} g_1(x) & = & f_1(x) + 2f_2(x) - f_3(x) \\ g_2(x) & = & f_1(x) + f_2(x) \\ g_3(x) & = & 2f_1(x) + f_3(x) \end{array} \right. .$$

16. Trouver toutes les solutions constantes du système (S) (c'est-à-dire les fonctions constantes f_1, f_2, f_3 qui vérifient bien le système (S)).

17. Avec les notations précédentes, montrer que g_1, g_2, g_3 sont dérivables si, et seulement si, f_1, f_2, f_3 le sont.

    Remarque : pour la réciproque, on pourra commencer par exprimer f_1, f_2, f_3 à l'aide de g_1, g_2, g_3.

18. Montrer que f_1, f_2, f_3 sont solutions du système différentiel (S) si, et seulement si, les fonctions g_1, g_2, g_3 sont solution du système différentiel :

$$(S') : \left\{ \begin{array}{lcl} g_1' & = & \alpha g_1 \\ g_2' & = & \beta g_2 \\ g_3' & = & \gamma g_3 \end{array} \right.$$

    avec α, β, γ des réels que l'on donnera explicitement.

19. Résoudre le système (S') puis en déduire les solutions de (S).

20. Montrer que quelque soient $x_0, a, b, c \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution (f_1, f_2, f_3) de (S) telle que :

$$(f_1(x_0), f_2(x_0), f_3(x_0)) = (a, b, c).$$

21. Étant données f_1, f_2, f_3 qui forment une solution de (S), on l'assimile à la fonction :

$$F : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \end{array} \right. .$$

    Montrer que l'ensemble des solutions ainsi représenté est un espace vectoriel, et en donner une base.