DS n^{o}6

I Limites, équivalents et suites

Exercice 1 1. en 0 :

(a) $\dfrac{x^2e^x}{\ln(1+x)\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{x} = x \underset{x\to 0}{\to} 0$

(b) $\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2x}{-x^2} = \dfrac{-2}{x}$ qui n'a pas de limite en 0

(c) $(4x^3-5x^2+x)e^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} e\cdot x \underset{x\to 0}{\to} 0$

(d) $(e^x-1)\sin(x)+\tan(x)\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\to} 0$

(e) $\dfrac{\ln(1+x)-e^x}{\cos(x)-1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-1}{-x^2/2} = \dfrac{2}{x^2} \underset{x\to 0}{\to} +\infty$ (pas de problème de signe cette fois-ci) ;

2. en 3 :

(a) $\cos(3x)e^{2x^3} \underset{x\to 3}{\sim} \cos(9)e^{54} \underset{x\to 3}{\to} \cos(9)e^{54}$ (limite finie non nulle)

(b) $\ln(x)-\ln(4) \underset{x\to 3}{\sim} \ln(3)-\ln(4) \underset{x\to 3}{\to} \ln(3)-\ln(4)$ (limite finie non nulle)

(c) $\ln(x)-\ln(3) = \ln\left(\dfrac{x}{3}\right) \underset{x\to 3}{\sim} \dfrac{x-3}{3} \underset{x\to 3}{\to} 0$

(d) $\ln(1+x)-2\ln(2) = \ln\left(\dfrac{1+x}{4}\right) \underset{x\to 3}{\sim} \dfrac{x-3}{4} \underset{x\to 3}{\to} 0$

(e) $\sqrt{x^2-8}\cdot\sqrt{x^3-4}\cdot(e^x-e^3) \underset{x\to 3}{\sim} \sqrt{23}\cdot e^3(x-3) \underset{x\to 3}{\to} 0$

3. en $+\infty$:

(a) $\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{xe^x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x/2}{xe^x} = \dfrac{1}{2x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$

(b) $\dfrac{e^x-x^2\ln(x)+\ln(x)}{x^2\ln(x)-x^3+x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{-x^3} \underset{x\to+\infty}{\to} -\infty$

(c) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} = \sqrt{x}\left(\sqrt{1+1/x}-\sqrt{1-1/x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{2x}-1+\dfrac{1}{2x}+\mathrm{o}(1/x)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$

(d) $\dfrac{1}{(x+1)^{12}}-\dfrac{1}{(x-1)^{12}} = \dfrac{1}{x^{12}}\left((1+1/x)^{-12}-(1-1/x)^{-12}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{1}{x^{12}}\left(1-\dfrac{12}{x}-1-\dfrac{12}{x}+\mathrm{o}(1/x)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim}$
$-\dfrac{24}{x^{13}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$

(e) $\ln(x^2+x+1) = \ln(x^2)+\ln(1+1/x+1/x^2) \underset{x\to+\infty}{=} 2\ln(x)+\mathrm{o}(1) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$

Exercice 2 1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1} + 1$: formule vérifiée pour $u_1 = 5 = 2^2 + 1$;

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -1 + 3n$ (suite arithmétique) : formule vérifiée pour $u_1 = 2$;

3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - (-3)^{n+1}$: formule vérifiée pour $u_1 = -8 = 1 - 9$

4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 8$: formule vérifiée pour $u_1 = 8 = 8$.

Exercice 3 1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + 2^{n+1}$: formule vérifiée pour $u_2 = 9 = 1 + 2^3$

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (1-n)2^n$: formule vérifiée pour $u_2 = -4 = (-1) \cdot 2^2$

3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos(n\pi/3) + \sqrt{3}\sin(n\pi/3) = 2\cos((n-1)\pi/3)$: formule vérifiée pour $u_2 = 1 = 2\cos(\pi/3)$.

II Matrices

Exercice 4

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$: $A_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2A_1$.

   Par récurrence, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A_1^n = 2^{n-1}A_1$:

   - initialisation : pour $n = 1$, c'est directement l'expression de A_1 (on a même le cas $n = 2$)
   - hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_1^n = 2^{n-1}A_1$. Alors :

   $$A_1^{n+1} = A_1^n \cdot A_1 = 2^{n-1}A_1 \cdot A_1 = 2^{n-1}A_1^2 = 2^{n-1} \cdot 2A_1 = 2^n A_1 = 2^{n+1-1}A_1$$

   ce qui prouve bien le résultat par récurrence.

   Et finalement :

   $$A_1^n = \begin{cases} I_2 & \text{si} \quad n = 0 \\ 2^{n-1}A_1 & \text{si} \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

   Formule cohérente pour $n \leqslant 2$.

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: $A_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   On calcule les puissance de A_2 par binôme : soit $n \in \mathbb{N}$, les matrices I_2 (scalaire) et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ commutent et vérifient $A = I_2 + B$. Et on a :$B^2 = B$. Et une récurrence immédiate donne : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ B^k = B$. Par formule du binôme :

   $$A_2^n = (I_2 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = \underbrace{I_2}_{k=0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B}_{k \neq 0} = I_2 + (2^n - 1)B = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

   où on vérifie la cohérence de la formule pour $n \leqslant 2$.

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$: $A_3^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$A_3^n = \begin{cases} 2^{n/2}I_2 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ 2^{(n-1)/2}A_3 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}.$$

   - initialisation : pour $n = 0$, qui est pair, on a bien $A_3^0 = I_2 = 2^{0/2}I_2$;

- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A_3^n = \begin{cases} 2^{n/2} I_2 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ 2^{(n-1)/2} A_3 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}$. Alors :
  - si n est pair :
  $$A_3^{n+1} = A_3^n \cdot A_3 = 2^{n/2} I_2 A_3 = 2^{n/2} A_3 = 2^{(n+1-1)/2} A_3$$
  qui est la formule voulue comme $n+1$ est impair ;
  - si n est impair :
  $$A_3^{n+1} = A_3^n \cdot A_3 = 2^{(n-1)/2} A_3^2 = 2^{(n-1)/2} \cdot 2 I_2 = 2^{(n+1)/2} I_2$$
  qui est la formule voulue comme $n+1$ est pair.

  D'où le résultat par récurrence.

  Formule cohérente pour $n \leqslant 2$.

4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $A_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule par binôme : si $n \in \mathbb{N}$, en posant $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui commute avec I_3 et vérifie $A_4 = I_3 + J$, on a :
$$A_4^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k$$
mais on a : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$, ce qui permet d'arrêter la somme à 2 pour $n \geqslant 2$. Et on a finalement :
$$A_4^n = \begin{cases} I_3 & \text{si} \quad n = 0 \\ A_4 & \text{si} \quad n = 1 \\ I_3 + nJ + \binom{n}{2} J^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si} \quad n \geqslant 2 \end{cases}.$$
Formule cohérente pour $n \leqslant 2$.

5. $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: $A_5^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A_5$. On fait comme pour A_1 : par récurrence on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_5^n = 3^{n-1} A_5$:
   - initialisation : pour $n = 1$, c'est directement l'expression de A_5 (on a même le cas $n = 2$)
   - hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_5^n = 3^{n-1} A_5$. Alors :
   $$A_5^{n+1} = A_5^n \cdot A_5 = 3^{n-1} A_5 \cdot A_5 = 3^{n-1} A_5^2 = 3^{n-1} \cdot 3A_5 = 3^n A_5 = 3^{n+1-1} A_5$$

   ce qui prouve bien le résultat par récurrence.

   Et finalement :
   $$A_5^n = \begin{cases} I_2 & \text{si} \quad n = 0 \\ 3^{n-1} A_5 & \text{si} \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
   Formule cohérente pour $n \leqslant 2$.

6. $A_6 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$: $A_6^2 = \begin{pmatrix} 27 & 11 & 11 \\ 11 & 27 & 11 \\ 11 & 11 & 27 \end{pmatrix}$.

   Et on retrouve la matrice A_5 qui commute avec $4I_3$ et vérifie $A_6 = A_5 + 4I_3$, et par binôme pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A_6^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_5^k \cdot 4^{n-k}$

$$= 4^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} \cdot 4^{n-k} \right) A_5 = 4^n I_3 + \frac{7^n - 4^n}{3} A_5 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7^n + 2 \cdot 4^n & 7^n - 4^n & 7^n - 4^n \\ 7^n - 4^n & 7^n + 2 \cdot 4^n & 7^n - 4^n \\ 7^n - 4^n & 7^n - 4^n & 7^n + 2 \cdot 4^n \end{pmatrix}$$

   Formule cohérente pour $n \leqslant 2$.

Exercice 5

1. $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (inversible en tant que matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls) : $P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (et on retrouve la formule de A_4^n pour $n = -1$).

2. $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: P_2 est inversible avec $P_2^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$: P_3 est inversible d'inverse : $P_3^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$: P_4 n'est pas inversible. En échelonnant sur les lignes, on obtient successivement les étapes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   et la dernière matrice n'est clairement pas inversible (elle a une ligne nulle) donc P_4 n'est pas inversible. Les mêmes opérations transforment I_3 en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot P_4 = 0$.

5. $P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$: P_5 est inversible d'inverse $P_5^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

6. $P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$: P_6 est inversible d'inverse : $P_6^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.