DS n^{o}6

I Limites, équivalents et suites

Exercice 1 Donner un équivalent et la limite éventuelle des fonctions suivantes en les points considérés :

1. en 0 :
   (a) $\dfrac{x^2e^x}{\ln(1+x)\cos(x)}$
   (b) $\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-x^2)}$
   (c) $(4x^3-5x^2+x)e^{\cos(x)}$
   (d) $(e^x-1)\sin(x)+\tan(x)\cos(x)$
   (e) $\dfrac{\ln(1+x)-e^x}{\cos(x)-1}$
2. en 3 :
   (a) $\cos(3x)e^{2x^3}$
   (b) $\ln(x)-\ln(4)$
   (c) $\ln(x)-\ln(3)$
   (d) $\ln(1+x)-2\ln(2)$
   (e) $\sqrt{x^2-8}\cdot\sqrt{x^3-4}\cdot(e^x-e^3)$
3. en $+\infty$:
   (a) $\dfrac{\text{ch}(x)}{xe^x}$
   (b) $\dfrac{e^x-x^2\ln(x)+\ln(x)}{x^2\ln(x)-x^3+x^2}$
   (c) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$
   (d) $\dfrac{1}{(x+1)^{12}}-\dfrac{1}{(x-1)^{12}}$
   (e) $\ln(x^2+x+1)$

Exercice 2 Donner l'expression explicite de u_n pour les suites arithmético-géométriques (u_n) données par les premières valeurs et les relations de récurrences suivantes. On calculera u_1 pour vérifier la formule.

1. $u_0=3$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=2u_n-1$
2. $u_0=-1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+3$
3. $u_0=4$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-3u_n+4$
4. $u_0=8$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-\dfrac{1}{2}u_n+12$

Exercice 3 Donner l'expression explicite de u_n pour les suites (u_n) linéaires récurrentes d'ordre 2 données par les premières valeurs et les relations de récurrences suivantes. On veillera à ne pas utiliser l'exponentielle complexe pour exprimer les suites réelles, et on utiliser les fonctions circulaires à la place. On calculera u_2 pour vérifier la formule.

1. $u_0 = 3$, $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$
3. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$

II Matrices

Exercice 4

Pour chacune des matrices $A_i \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes, calculer A_i^2, puis calculer A_i^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. On vérifiera bien que la formule donnée pour $k \in \mathbb{N}$ est valable pour $k = 0, 1, 2$:

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
6. $A_6 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 5

Dire si les matrices P_i suivantes sont inversibles et le prouver. En cas d'inversibilité, on donnera l'inverse de P. Que ce soit pour l'inversibilité ou la non inversibilité, on donnera un calcul qui permette de vérifier le résultat **EN LE FAISANT FIGURER SUR LA COPIE** : on écrira par exemple le calcul du produit $P \cdot P^{-1}$ dans le cas inversible, et un vecteur X non nul tel que $PX = 0$ ou $XP = 0$ dans le cas non inversible.

1. $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
4. $P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
5. $P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
6. $P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$