Programme de colles n° 14

Quinzaine du 19 mai au 6 juin 2025

Chapitres concernés

- Chapitre 25 : intégration :
  - propriétés générales de l'intégrale pour les fonctions continues : linéarité, positivité, stricte croissance, relation de Chasles, inégalité triangulaire ;
  - théorème fondamental de l'analyse : moyenne d'une fonction continue sur un segment, théorème fondamental de l'analyse, utilisation à l'étude de fonction définie par une intégrale où la variable est dans les bornes ;
  - manipulation d'intégrales : intégrations par parties, changements de variables, utilisation de symétries (parité, périodicité, etc.) ;
  - inégalité de Taylor–Lagrange (le théorème de Taylor avec reste intégral est hors programme mais a été vu en cours)
  - sommes de Riemann : lien avec intégrale et valeur limite ; techniques pour estimer la vitesse de convergence
- Chapitre 26 : étude statistique de variables aléatoires :
  - couples de variables aléatoires : lois conjointes et marginales, passage des unes aux autres, indépendance (mutuelle ou deux à deux) de variables aléatoires
  - espérance : définition, méthode de calcul (par la loi, en revenant à l'espace probabilisé, ou par théorème de transfert), propriétés de l'espérance (linéarité, positivité/croissance avec cas d'égalité, inégalité triangulaire), espérance des lois usuelles, inégalité de Markov
  - variance/covariance : définition, formule de Koenig–Huygens, positivité (cas d'égalité), variance d'une combinaison linéaire (cas d'indépendance deux-à-deux), lien entre décorrélation et indépendance, variance des lois usuelles, inégalité de Bienaymé–Tchebychev

Démonstrations à savoir

- l'intégrale d'une fonction continue de signe constant est nulle si, et seulement si, la fonction est nulle
- limite de sommes de Riemann (dans le cas d'une fonction lipschitzienne)
- espérance des lois usuelles
- inégalité de Markov et de Bienaymé–Tchebychev

Remarques générales

- La chapitre d'intégration avait pour but de donner une construction de l'intégrale : les techniques de manipulation d'intégrales du premier semestre sont à maîtriser (par exemple pour des résolutions d'équations différentielles).
- Différents outils d'analyse, notamment les manipulations d'ordres de grandeurs (avec formules de Taylor par exemple, et primitives de DL) sont particulièrement utiles pour estimer des intégrales, et sont à maîtriser.
- Il faut pouvoir reconnaître des sommes qui s'apparentent à des sommes de Riemann, et les adapter pour se ramener au théorème de Riemann par les manipulations classiques d'intégrales (linéarité, relation de Chasles, etc.).
- Toutes les probabilités se font sur des univers finis. Et donc les ensembles images des variables aléatoires peuvent toujours être réduits à des ensembles finis.
- Les méthodes pour étudier une variable aléatoire sur un univers fini (déterminer son ensemble image puis raisonner en termes de distributions de probabilités par exemple) sont à connaître, ainsi que les théorèmes usuels sur les espaces probabilisés (formule des probabilités totales, des probabilités composées, ou de Bayes par exemple).