Programme de colles n° 13

QUINZAINE DU 5 AU 16 MAI 2024

Chapitres concernés

- Chapitre 21 : espaces vectoriels de dimension finie :
  - bases/familles en dimension finie : lien avec la dimension, base incomplète, base extraite, existence de bases ; détermination de la liberté (ou non) et du caractère générateur (ou non) en comparant cardinal d'une famille et dimension de l'espace.
  - sous-espaces vectoriels en dimension finie : dimension d'un sev, dimension d'une somme directe, formule de Grassmann, caractérisation d'une somme directe par la dimension
  - applications linéaires en dimension finie : caractérisation de la bijectivité/injectivité/surjectivité ; théorème du rang ; formes linéaires et hyperplans en dimension finie
- Chapitre 24 : matrices et applications linéaires
  - représentation matricielle des vecteurs ou des applications linéaires : définition, isomorphismes à base(s) fixée(s) et compatibilité avec les opérations
  - rang d'une matrice, et interprétation en lien avec les applications linéaires ou les systèmes linéaires
  - changements de bases : formule du changement de base, matrices semblables

Démonstrations à savoir

- si E est de dimension finie et F est un sous-espace de E, alors F est de dimension finie, $\dim(F) \leq \dim(E)$, et il y a égalité si, et seulement si, $E = F$.
- formule de Grassmann
- caractérisation des espaces supplémentaires en dimension finie
- montrer que, pour S supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$, $f|_S^{\mathrm{Im} f}$ est un isomorphisme, et en déduire le théorème du rang
- matrice d'un projecteur ou d'une symétrie (énoncer le résultat pour l'un et le montrer pour l'autre)

Remarques générales

- La dimension finie est un outil supplémentaire, qui permet de démontrer très facilement certaines propriétés : il faudra toujours regarder si la dimension permet de montrer très rapidement une propriété avant de se lancer dans une démonstration trop générale qui n'utiliserait pas du tout la dimension finie.
- L'utilisation de bases ou de supplémentaires (dont l'existence a été prouvée en dimension finie) peut permettre de trouver une méthode de résolution, mais donnent généralement des méthodes assez complexes et calculatoires, et ne devraient donc constituer une démarche naturelle de résolution.
- Inversement, les théorèmes de dimensions finis que sont la stricte croissance de la dimension, la formule de Grassmann ou le théorème du rang sont des outils particulièrement puissants, et devraient toujours être gardés à l'esprit lors de résolution de problèmes d'algèbre linéaire en dimension finie.
- L'isomorphisme entre applications linéaires (à bases fixées) et matrices s'utilise dans les deux sens : soit on transforme un problème d'algèbre linéaire en un problème matriciel qu'on résout par calcul matriciel ; soit on interprète une matrice comme la matrice d'une application linéaire et on en déduit des propriétés (rang, puissances, etc.).
- Les interprétations matricielles d'applications linéaires ou de vecteurs se font évidemment en dimension finie, et il faut donc être au point avec les différents résultats valables en dimension finie quand on manipule des matrices : base incomplète/extraite, lien entre dimension/cardinal et caractère libre/générateur, etc.