Programme de colles n° 12

QUINZAINE DU 7 AU 18 AVRIL 2025

Chapitres concernés

- Chapitre 22 : probabilités et dénombrement :
  - technique usuelles de dénombrements par bijection/injection/surjection avec des ensembles finis dont on connait le cardinal, principe des tiroirs ou des bergers, arrangements, combinaisons, interprétation combinatoire des coefficients binomiaux.
  - espaces probabilisés : notion d'expérience aléatoire, de probabilités, propriétés générales d'une probabilité
  - notion de variable aléatoire : définition, loi, variables aléatoires usuelles
  - probabilités conditionnelles : définition et propriétés élémentaires, formules des probabilités composées/totales, indépendance, formule de Bayes
- Chapitre 23 : formules de Taylor et développements limités :
  - notion de développement limité : unicité des coefficients, coefficients pour une fonction paire/impaire, équivalent à partir d'un dl ; primitivation d'un dl ; formule de Taylor–Young ; dl usuels en 0 ; opérations sur les dl (combinaisons linéaires, produits, puissances, composée)
  - applications des développements limités : détermination de dl de fonctions réciproques, calculs de limites, étude locale de fonction (position par rapport à une tangente, nature de points critiques), étude des asymptotes d'une fonction (détermination des asymptotes et positions relatives), et développements asymptotiques.

Démonstrations à savoir

- Propriétés d'une probabilité (probabilité du complémentaire, d'une union disjointe ou non, croissance)
- Étant donné Ω univers fini, l'application $\mathbb{P} \mapsto (\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$ qui, à une probabilité, associe la famille des probabilités des événements élémentaires est une bijection de l'ensemble des probabilités sur Ω sur l'ensemble des distributions de probabilité sur Ω.
- Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors $\mathbb{P}_B$ définit une probabilité sur Ω.
- Formule des probabilités composées.
- Formule des probabilités totales.

Remarques générales

- Une preuve de dénombrement ne doit pas nécessairement se faire dans un cadre aseptisé dans lequel on ne compte que les éléments des ensembles de la forme $\{1, \dots, n\}$ et où on s'y ramène par des bijections bien choisies. Mais l'autre extrême n'est pas acceptable pour autant, et un dénombrement par tentative d'énumération se doit d'être clair pour être considéré valable.
- Pour être comprise, une variable aléatoire doit être décrite correctement, et en particulier il faut déterminer son ensemble image.
- Le fait de travailler sur un univers fini a l'avantage d'identifier les probabilités aux distributions de probabilités, dont les propriétés sont plus faciles à vérifier : il n'y a alors pas à redémontrer toutes les propriétés d'une probabilité.
- Pour les développements limités, les élèves doivent avoir conscience qu'il s'agit d'un outil de calcul. Les notions d'analyse déjà rencontrées (continuité et dérivabilité notamment) sont en lien très étroit avec les développements limités et sont à maîtriser. Et inversement les développements limités permettent d'étudier plus finement ces objets (en rendant plus faciles certains calculs de limites par exemple).