Programme de colles n° 10

QUINZAINE DU 10 AU 21 MARS 2025

Chapitres concernés

- Chapitre 19 : dérivabilité
  - définition de la dérivabilité (avec taux d'accroissements), lien avec les dérivabilité à gauche et à droite ;
  - préservation de la dérivabilité : dérivabilité (et dérivabilité itérée) d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée, d'une réciproque ;
  - propriétés globales des fonctions dérivables : extrema et points critiques (lien entre eux), théorèmes de Rolle et des accroissements finis, inégalité des accroissements finis (fonctions lipschitziennes), lien avec la monotonie
  - prolongement des fonctions dérivables : prolongement $\mathcal{C}^1$ et prolongement $\mathcal{C}^k$;
  - fonctions convexes : définition (courbe sous ses cordes) et différentes caractérisations équivalentes de la convexité (croissance des taux de variations, inégalité des pentes, croissante de la dérivée, courbe au dessus de ses tangentes)

Démonstrations à savoir

- théorème de Rolle et égalité des accroissements finis ;
- théorème de la limite de la dérivée (preuve) et énoncé du théorème du prolongement $\mathcal{C}^k$;
- inégalité des accroissements finis (pour une fonction à valeurs complexes) ;
- formule de Leibniz

Remarques générales

- La notion de limite est en lien très fort avec la notion de dérivabilité : les résultats vus dans les précédents chapitres pour déterminer des limites doivent être maîtrisés (limites classiques, croissances comparées, limites de taux d'accroissements) ;
- la distinction a été faite dans le cours entre les théorèmes qui sont ou non applicables pour une fonction à valeurs complexes : elle est à connaître par les élèves ;
- la justification de la dérivabilité doit se faire en amont du calcul de la dérivée. Certains théorèmes (dérivée d'un produit, etc.) on été énoncé avec des hypothèses $\mathcal{C}^k$: ces résultats doivent être connus, et il n'y a pas à vérifier a posteriori qu'une dérivée est continue quand un théorème permet en amont de dire que la fonction à dériver est $\mathcal{C}^1$.
- pour la convexité, il faut savoir distinguer les manières standards de montrer la convexité (par les dérivées si c'est possible, par la définition sinon) et les manières de l'utiliser une fois prouvée (par l'inégalité des pentes par exemple).