Feuille d'exercices n^{o}8 : Équations différentielles

Exercice 1 [Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (sur $\mathbb{R}$)]

1. $y'+3y=x^2e^{-x}$: $S=\left\{x\mapsto \lambda e^{-3x}+\dfrac{2x^2-2x+1}{4}e^{-x}\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\right\}$; Cauchy : $\lambda=\dfrac{3}{4}$;
2. $y'+y=\cos(x)+\sin(x)$: $S=\{x\mapsto \lambda e^{-x}+\sin(x)\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$; Cauchy : $\lambda=1$;
3. $y'-\frac{3x}{x^2+1}y=\sqrt{x^2+1}-x$: $S=\left\{x\mapsto \lambda(1+x^2)^{3/2}+\mathrm{Arctan}(x)(1+x^2)^{3/2}+(1+x^2)\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\right\}$; Cauchy : $\lambda=0$;
4. $(1+x^2)y'+xy=x^3$: $S=\left\{x\mapsto \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{x^2-2}{3}\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\right\}$; Cauchy : $\lambda=\dfrac{5}{3}$;
5. $(1+e^{-x})y'-y=1$: $S=\{x\mapsto \lambda(1+e^x)-1\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$; Cauchy : $\lambda=1$;
6. $y'-y=\frac{1}{1+e^{2x}}$: $S=\{x\mapsto \lambda e^x-1-\exp(x)\cdot\mathrm{Arctan}(\exp(x))\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$; Cauchy : $\lambda=2+\pi/4$.

Exercice 2 [Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (avec intervalle)]

1. $2xy'-3y=x^2$: $S=\left\{x\mapsto \lambda x^{3/2}+x^2\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\right\}$;
2. $(x-1)y'-2y=(x-1)^3$: $S=\{x\mapsto \lambda(x-1)^2+x(x-1)^2\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$;
3. $\sqrt{1-x^2}y'-y=2$: $S=\{x\mapsto \lambda\exp\left(\mathrm{Arcsin}(x)\right)-2\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$;
4. $xy'-2y=x^5\sin(x)$: $S=\{x\mapsto \lambda x^2+(-x^4+2x^2)\cos(x)+2x^3\sin(x)\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$;
5. $y'+\tan(x)y=\sin(2x)$: $S=\{x\mapsto \lambda\cos(x)-2\cos^2(x)\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$;
6. $x(x-2)y'-2y=(x-1)(x-3)$: $S=\left\{x\mapsto \lambda\dfrac{x-2}{x}+x-\dfrac{3}{2}\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\right\}$.

Exercice 3 [Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (avec recollement))]

1. $xy'-2y=2x^4$: $S_+=\{x\mapsto \lambda x^2+x^4\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$ et $S_-=\{x\mapsto \mu x^2+x^4\,|\,\mu\in\mathbb{R}\}$; tout recollement est solution :
$$S=\left\{x\mapsto \begin{cases}\lambda x^2+x^4 & \text{si}\quad x\geqslant 0\\ \mu x^2+x^4 & \text{si}\quad x\leqslant 0\end{cases}\,|\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}.$$
2. $x(x^2+1)y'-(x^2-1)y=-2x$: $S_+=\left\{x\mapsto \lambda\dfrac{1+x^2}{x}-x\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\right\}$ et $S_-=\left\{x\mapsto \mu\dfrac{1+x^2}{x}-x\,|\,\mu\in\mathbb{R}\right\}$; recollement continu impose $\lambda=\mu=0$, qui est alors dérivable :
$$S=\{x\mapsto -x\}.$$
3. $x^2y'-y=(x^2-1)e^x$: $S_+=\{x\mapsto \lambda\exp(-1/x)+\exp(x)\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$ et $S_-=\{x\mapsto \mu\exp(-1/x)+\exp(x)\,|\,\mu\in\mathbb{R}\}$ recollement continu : $\mu=0$; tous ces recollements sont dérivables en 0 (dérivée 1) :
$$S=\left\{x\mapsto \begin{cases}\lambda\exp(-1/x)+\exp(x) & \text{si}\quad x>0\\ \exp(x) & \text{si}\quad x\leqslant 0\end{cases}\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$
4. $(2x-x^2)y'+(x-1)y=x$: on coupe $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$ en $I_1=]-\infty;0[$, $I_2=]0;2[$ et $I_3=]2;+\infty[$. On a : $S_1=\left\{x\mapsto \lambda\sqrt{x^2-2x}+x\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\right\}$, $S_2=\left\{x\mapsto \mu\sqrt{2x-x^2}+x\,|\,\mu\in\mathbb{R}\right\}$ et $S_3=\left\{x\mapsto \gamma\sqrt{x^2-2x}+x\,|\,\gamma\in\mathbb{R}\right\}$; tous les recollements sont continus ; dérivable pour $\lambda=\mu=\gamma=0$:
$$S=\{x\mapsto x\}.$$

Exercice 4 [Absence de solution]

1. $xy' = y + x$: $S_+ = \{x \mapsto \lambda x + x\ln(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $S_- = \{x \mapsto \mu x + x\ln(-x) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$; tout recollement est continu ; aucun n'est dérivable (ni à gauche ni à droite, avec tangentes verticales) ;
2. $y'\sin(x) + y\cos(x) = \sin^2(x)$: sur $[-\pi;\pi]$: $S_+ = \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{\sin(x)} + \frac{x}{2\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ et $S_- = \left\{x \mapsto \frac{\mu}{\sin(x)} + \frac{x}{2\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{2} \mid \mu \in \mathbb{R}\right\}$; recollement en 0 impose $\lambda = \mu = 0$. Mais impossible d'avoir une limite finie en π.

Exercice 5 [Équations différentielles linéaires d'ordre 2]

1. $y'' + 2y' + 4y = 0$: $X^2 + 2X + 4 = (X+2)^2$ donc $S = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$; Cauchy : $\lambda = -3$ et $\mu = 1$;
2. $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}\cos(x)$: $X^2 - 2X - 3 = (X+1)(X-3)$; $S = \{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{3x} - \frac{\cos(x) + 4\sin(x)}{17}e^{-x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$; Cauchy : $\lambda = 1/2$ et $\mu = 19/34$;
3. $y'' - 6y' + 8y = 16x^2$: $X^2 - 6X + 8 = (X-4)(X-2)$; $S = \{x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{4x} + 2x^2 + 3x + \frac{7}{4} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$; Cauchy : $\lambda = -1/2$ et $\mu = -1/4$;
4. $y'' + y = \sin(x) + \sin^2(x)$: $X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$; $S_{\mathbb{C}} = \{x \mapsto \lambda e^{ix} + \mu e^{-ix} + 1 + \frac{\cos(2x)}{3} - \frac{x}{2}\cos(x) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$ et $S_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + 1 + \frac{\cos(2x)}{3} - \frac{x}{2}\cos(x) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$; Cauchy : $\lambda = -1/6 - 3i/4$ et $\mu = -1/6 + 3i/4$ (version $\mathbb{C}$) ou $\lambda = -1/3$ et $\mu = 3/2$ (version $\mathbb{R}$) ;
5. $y'' - 2y' + y = \cos(2x)$: $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$; $S = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{x} - \frac{3\cos(2x) + 4\sin(2x)}{25} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$; Cauchy : $\lambda = 1/5$ et $\mu = 28/25$;
6. $y'' + 4y' + 5y = \sin(x)e^{-2x}$: $X^2 + 4X + 5 = (X - (-2-i))(X - (-2+i))$; $S_{\mathbb{C}} = \{x \mapsto \lambda e^{(-2+i)x} + \mu e^{(-2-i)x} - \frac{x\cos(x)}{2}e^{-2x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$ et $S_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto (\lambda\cos(x) + \mu\sin(x))e^{-2x} - \frac{x\cos(x)}{2}e^{-2x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$; Cauchy : $\lambda = 1/2 - 7i/4$ et $\mu = 1/2 + 7i/4$ (version $\mathbb{C}$) ou $\lambda = 1$ et $\mu = 7/2$ (version $\mathbb{R}$) ;
7. $y'' - y' + (1+i)y = 0$: $X^2 - X + (1+i) = (X-i)(X-(1-i))$; $S = \{x \mapsto \lambda e^{ix} + \mu e^{(1-i)x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$; Cauchy : $\lambda = (2-i)/5$ et $\mu = (3+i)/5$;
8. $y'' - (1-i)y' - 2(1+i)y = 0$: $X^2 - (1-i)X - 2(1+i) = (X-2)(X-(-1-i))$; $S = \{x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{(-1-i)x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$; Cauchy : $\lambda = (7+i)/10$ et $\mu = (3-i)/10$.

Exercice 6 [Recherche des solutions particulières]

1. a. On pose $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$: y solution $\Leftrightarrow y'' + 2y' = x^2 - x \Leftrightarrow 6ax^2 + (6a+4b)x + (2b+2c) = x^2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 6a &= 1 \\ 6a + 4b &= -1 \\ 2b + 2c &= 0 \end{cases}$ donc $x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ est solution (c'est l'unique solution polynomiale de degré au plus 3).

   b. Par superposition, il suffit de résoudre $y'' + 2y' = 2\mathrm{ch}(x) = e^x + e^{-x}$, donc il suffit de résoudre $y'' + 2y' = e^x$ et $y'' + 2y' = e^{-x}$ (par superposition) :

$$S = \left\{x \mapsto \lambda + \mu e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{e^x}{3} - e^{-x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\right\}$$

2. a. On injecte : $a = -1/2$ et $b = -1$ est l'unique solution.

   b. $S = \left\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} + \frac{-x^2 - 2x}{2}e^x \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\right\}$

Exercice 7 [Systèmes d'équations différentielles]

1. $\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & z+x^2 \\ z' & = & y-x^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y'' & = & z'+2x = y+2x-x^2 \\ z & = & y'-x^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \lambda e^x+\mu e^{-x}+x^2-2x+2 \\ z & = & \lambda e^x-\mu e^{-x}-x^2+2x-2 \end{array}\right.$ et réciproque immédiate :

$$S=\left\{(x\mapsto \lambda e^x+\mu e^{-x}+x^2-2x+2, x\mapsto \lambda e^x-\mu e^{-x}-x^2+2x-2)\,|\,\lambda,\mu\in\mathbb{K}\right\}.$$

2. $\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & -6x+z+1 \\ z' & = & 6y-5z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z'' & = & -5z'+6z-36x+6 \\ y & = & 5z/6+z'/6 \end{array}\right.$ et idem :

$$S=\left\{(x\mapsto \lambda e^{-6x}+\mu e^x+5x+13/3, x\mapsto -6\lambda e^{-6x}+\mu e^x+6x+4)\,|\,\lambda,\mu\in\mathbb{K}\right\}.$$

3. $\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & y+8z+e^x \\ z' & = & 2y+z+e^{-3x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y'+2z' & = & 5y+10z+e^x+2e^{-3x}=5(y+2z)+e^x+2e^{-3x} \\ y'-2z' & = & -3y+6z+e^x-2e^{-3x}=-3(y-2z)+e^x-2e^{-3x} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y+2z & = & \lambda e^{5x}-\dfrac{e^x+e^{-3x}}{4} \\ y-2z & = & \mu e^{-3x}+\dfrac{e^{-x}}{2}-2xe^{-3x} \end{array}\right.$

$$S=\left\{(x\mapsto \frac{\lambda}{2}e^{5x}+\frac{\mu}{2}e^{-3x}+\frac{e^x+(-1-8x)e^{-3x}}{8}, x\mapsto \frac{\lambda}{4}e^{5x}-\frac{\mu}{4}e^{-3x}+\frac{-3e^x+(-1+8x)e^{-3x}}{16})\,|\,\lambda,\mu\in\mathbb{K}\right\}$$

$$=\left\{(x\mapsto 2\lambda e^{5x}+2\mu e^{-3x}+\frac{e^x+(-1-8x)e^{-3x}}{8}, x\mapsto \lambda e^{5x}-\mu e^{-3x}+\frac{-3e^x+(-1+8x)e^{-3x}}{16})\,|\,\lambda,\mu\in\mathbb{K}\right\}$$

Exercice 8 [Équation fonctionnelle 1]

Analyse–synthèse :

— Analyse : on dérive l'égalité par rapport à x puis par rapport à y :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ f''(x+y)=f'(x)f'(y)$$

puis $y=0$: $a=f'(0)$ donne $f''=af'$ puis $f':x\mapsto \lambda e^{ax}=ae^{ax}$ (comme $\lambda=f'(0)=a$) puis $f:x\mapsto e^{ax}+c$ $(c\in\mathbb{R})$;

— Synthèse : $c=0$

donc $S=\{x\mapsto e^{ax}\,|\,a\in\mathbb{R}\}$.

Exercice 9 [Équation fonctionnelle 2]

Analyse–synthèse :

— Analyse : on dérive l'égalité par rapport à x puis par rapport à y :

$$\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*,\ f'(xy)+yxf''(xy)=0$$

puis $y=1$: $f''(x)+f'(x)/x=0$ donc $f':x\mapsto a/x$ puis $f:x\mapsto a\ln(x)+c$ $(c\in\mathbb{R})$

— Synthèse : $c=0$ ou $a=0$ et $c=-1$

donc $S=\{x\mapsto a\ln(x)\,|\,a\in\mathbb{R}\}\cup\{0\}$.

Exercice 10 [Équation fonctionnelle 3]

Analyse–synthèse :

— Analyse : on dérive :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ f''(x)=-f'(-x)=-f(x)$$

d'où $f:x\mapsto a\cos(x)+b\sin(x)$

— Synthèse : $a=b$

donc $S = \{x \mapsto a(\cos(x) + \sin(x)) \,|\, a \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 11 [Équation différentielle non linéaire]

1. $y' + ay + by^2 = 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{y}\right)' + a\frac{1}{y} = -b$
2. $y' + ay + by^2 = c = y_0' + ay_0 + by_0^2 \Leftrightarrow (y - y_0)' + (a + 2y_0)(y - y_0) + b(y - y_0)^2 = 0$
3. $\tan = y_0$ est solution : $z = \dfrac{1}{y - \tan}$ solution de $y' + 2\tan(x)y = -1$ donc $z : x \mapsto \lambda\cos^2(x) - \cos(x)\cdot\sin(x)$ puis $y = \dfrac{1}{z} + y_0$ donc :

$$S = \left\{x \mapsto \frac{1}{\lambda\cos^2(x) - \cos(x)\sin(x)} + \tan(x) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$